

LE PROBLÈME DE RÉPARTITION DES CLIENTÈLES SCOLAIRES

par

TEKOGAN DZIGBODI HEMAZRO

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, septembre 1998



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-40589-3

Le 11 septembre 1998, le jury suivant a accepté ce mémoire dans sa version finale.
date

Président-rapporteur: M. Abdelhamid Benchakroun _____
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Jean-Pierre Dussault _____
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Jean-Guy Dion _____
Département de mathématiques et d'informatique

SOMMAIRE

La répartition des clientèles scolaires consiste à regrouper autour d'une école des unités géographiques appelées zones en secteurs scolaires, chaque secteur devant vérifier des critères d'acceptabilité prédéfinis.

Une bonne répartition des clientèles doit mener à une utilisation maximale de toutes les ressources (locaux, enseignants) et entraîner des coûts de transport assez faibles.

Dans ce mémoire, nous construisons pour ce problème un modèle assez général qui reflète les aspirations précitées. Ensuite, on développe différents algorithmes pour résoudre le problème. On présente à l'appui quelques tests numériques faits grâce à des codifications en C++.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de recherche le Docteur Jean-Guy Dion qui m'a fait confiance et a su m'encourager tout le long de ma maîtrise. Je tiens aussi à le remercier pour sa disponibilité, son appui scientifique et surtout son appui financier qui m'a été utile pour la progression de ma recherche.

Je remercie également les membres du jury pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer le contenu de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes parents pour leurs encouragements, leur amour et le soutien qu'ils m'ont toujours apporté et surtout durant cette maîtrise.

Enfin, je tiens à remercier tous mes amis au département de mathématiques et informatique de l'université de Sherbrooke et ailleurs, pour leurs encouragements et leur soutien.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	ii
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES TABLEAUX	viii
LISTE DES FIGURES	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — MODÉLISATION	4
CHAPITRE 2 — PREMIÈRE HEURISTIQUE	8
2.1 Relaxation du programme linéaire (P)	9
2.2 Heuristique d'affectation des zones aux écoles	11
2.3 Exemples	19
CHAPITRE 3 — NOUVELLE APPROCHE DE RÉOLUTION DU PRO- BLÈME	30
3.1 Introduction	30
3.2 La contrainte de contiguïté	31

3.3	Définitions et propositions	32
3.4	Le problème de la contrainte de contiguïté	38
3.5	Exemples	40
CHAPITRE 4 — MÉTHODE À PORTES OUVERTES		48
4.1	Introduction	48
4.2	Idée de l'heuristique	49
4.2.1	Définitions et propositions	49
4.3	Heuristique	55
4.4	Exemple	56
CHAPITRE 5 — APPLICATION DE LA RELAXATION LAGRANGIENNE AU MODÈLE (P)		63
5.1	Résolution du problème (P)	64
5.1.1	Méthode lagrangienne classique	68
5.2	Le problème de la contiguïté	70
CONCLUSION		73
Annexe A — ANNEXE		75
A.1	Codification de l'heuristique 1	75
A.1.1	Entrée des données.	75
A.1.2	Traitement	76
A.2	Codification qui génère le modèle (PC)	77
A.2.1	Entrée des données	77

A.2.2 Traitement	77
BIBLIOGRAPHIE	77

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Populations étudiantes par zone et par niveau	20
2.2	Distances de chaque zone à toutes les écoles	21
2.3	Coeur de l'école 1	21
2.4	Coeur de l'école 2	22
2.5	Coeur de l'école 3	22
2.6	Zones de B	22
2.7	Zones de l'école 1 après la 1ère phase de correction	23
2.8	Zones de l'école 2 après la 1ère phase de correction	23
2.9	Zones de l'école 3 après la 1ère phase de correction	23
2.10	Zones de l'école 1 après la répartition	25
2.11	Zones de l'école 2 après la répartition	26
2.12	Zones de l'école 3 après la répartition	26
2.13	Coeur de l'école 1	27
2.14	Coeur de l'école 2	27
2.15	Coeur de l'école 3	28

2.16 Zones de B	28
2.17 Zones de l'école 1 après la 1ère phase de correction	28
2.18 Zones de l'école 2 après la 1ère phase de correction	29
2.19 Zones de l'école 3 après la 1ère phase de correction	29

LISTE DES FIGURES

2.1	Région constituée de 14 zones et 3 écoles	20
2.2	Résultat de la sectorisation 1	26
2.3	Résultat de la sectorisation 2	29
3.1	Région constituée de 17 unités de ventes avec un centre de vente dans la zone numéro 6	32
3.2	Le réseau routier associé à la région géographique	33
3.3	Arbre d'adjacence des plus courts chemins	34
3.4	Arbre hiérarchique d'adjacence	36
3.5	Arbre hiérarchique d'adjacence lié à l'école 1	40
3.6	Arbre hiérarchique d'adjacence lié à l'école 2	41
3.7	Arbre hiérarchique d'adjacence lié à l'école 3	42
3.8	Résultat de la sectorisation	47
4.1	Exemple avec les différents ensembles	50
4.2	Résultat de la sectorisation	62

INTRODUCTION

Les origines de la répartition des clientèles scolaires remontent à l'année 1954 aux États-Unis.

En effet, au lendemain de l'abolition de la ségrégation raciale, l'importance d'un équilibre entre les races dans les écoles va remettre en cause les méthodes existantes d'affectation des étudiants aux écoles et pousser à la définition de nouvelles procédures de recrutement d'étudiants.

Jusqu'en 1968 et malgré l'interdiction par la cour suprême américaine de recrutements sur une base raciale, les faits étaient autres. La cour suggéra alors que des techniques plus réfléchies soient élaborées afin de promouvoir la déségrégation dans les écoles à travers le pays. Des tentatives ont alors permis de déterminer de façon empirique des mesures quantitatives d'acceptabilité de plans de répartition.

Des chercheurs comme Clarke et Surkis en 1967 [3], P. Beldford et D. Ratliff en 1972 [2], R. Liggett en 1973 [6] se sont penchés sur le problème du point de vue racial. Au Japon, pour diverses raisons, les administrateurs firent face dans plusieurs villes à de sérieuses difficultés dans la redistribution des clientèles scolaires aux écoles. Pour eux, il fallait assigner les étudiants du même voisinage à la même école dans le but de préserver un certain nombre de valeurs. H. Mine, K. Ohno et I. Miyaji en 1982 [7] se sont penchés sur le problème.

De nos jours et dans beaucoup de pays, la répartition des clientèles scolaires chaque

année est un casse-tête pour les commissions scolaires qui doivent déterminer les groupes d'étudiants à affecter à chaque école sans violer les contraintes de capacité des écoles et en respectant les affinités ethnique, sociale et culturelle.

On formule donc le problème de la façon suivante. Considérons une région géographique constituée de M zones et N écoles ($N < M$). Il s'agit de subdiviser cette région en N secteurs scolaires, chaque secteur étant un regroupement contigu de zones et contenant une seule école.

Les questions essentielles que suscitent cette répartition sont les suivantes.

- Comment à partir d'informations de clientèle étudiante construire des secteurs de voisinage selon des critères d'affinités géographique, sociale ou ethnique?
- Comment affecter chacun de ces secteurs aux écoles disponibles en respectant les capacités d'accueil et les ratios étudiants par classe de façon à préserver la contiguïté géographique, sociale ou ethnique?
- Comment allouer ces secteurs aux écoles pour avoir une répartition optimale?

L'allocation optimale peut, par exemple, minimiser

- le coût de transport des étudiants,
- la plus grande durée de trajet d'autobus,
- les débordements à l'intérieur des classes, ou encore
- maximiser la contiguïté des secteurs.

Dans ce mémoire, nous présentons au premier chapitre une modélisation du problème. Au deuxième, nous présentons une heuristique pour résoudre le problème. Nous l'illustrons par quelques résultats des tests numériques que nous avons fait pour valider l'heuristique

grâce à une codification de l'heuristique en C++. Dans le troisième chapitre, nous introduisons dans le modèle une nouvelle contrainte, celle de contiguïté. Nous expliquons en détail les origines de cette contrainte et faisons des remarques très importantes sur cette contrainte. Nous avons fait quelques tests numériques pour apprécier les résultats que donne ce nouveau modèle. Au quatrième chapitre, nous présentons une heuristique appelée méthode à portes ouvertes pour résoudre le problème. Enfin au cinquième chapitre, nous présentons une approche de résolution du problème qui utilise les techniques de la relaxation lagrangienne.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION

La modélisation est la représentation mathématique d'un phénomène physique, économique ou humain dans le but de mieux étudier celui-ci. Cette représentation est très importante parce qu'elle va décider de la démarche à adopter pour analyser le problème et ensuite choisir les méthodes appropriées pour la résolution. Ce chapitre est donc consacré à la modélisation du problème de répartition des clientèles scolaires. Le modèle va affecter chaque zone de la région à une et une seule école et créer autour de chaque école un secteur scolaire contigu qui respecte les capacités d'accueil et les ratios étudiants par classe de l'école.

Notations, terminologie.

L'adresse est l'indication précise du domicile de quelqu'un.

La zone est une portion de la région constituée d'un ensemble d'adresses. On la supposera compacte.

Le secteur scolaire est un ensemble de zones qui sont toutes affectées à la même école.

Le niveau est une année scolaire. Il est noté k , $k = 1, \dots, q$.

La zone est notée i , $i = 1, \dots, m$.

L'école est notée j , $j = 1, \dots, n$.

On notera i l'ensemble des zones de la région et j l'ensemble des écoles.

Le nombre d'élèves de niveau k dans la zone i est noté P_i^k .

La distance moyenne parcourue d'une zone i à une école j est notée d_{ij} .

La capacité de l'école j est notée N^j . Elle représente le nombre de locaux disponibles dans l'école j . On l'appelle aussi capacité physique de l'école j .

Le maximum d'élèves dans une classe de niveau k est noté m_k . C'est une moyenne qui définit la norme d'occupation des locaux selon les niveaux. On parlera donc de capacité normative quand on traitera de l'occupation des locaux.

Les variables de décision sont

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la zone } i \text{ est affectée à l'école } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre de classes de niveau k à créer dans l'école j est y_{kj} . C'est une variable entière qui, une fois notre problème résolu, précisera le nombre de locaux à allouer aux élèves d'un niveau k dans l'école j .

Nous précisons ci-après le modèle.

La fonction objectif

Dans ce mémoire, nous avons choisi de faire une répartition de la clientèle en minimisant la distance totale parcourue par les élèves de leur zone à l'école où ils sont affectés. Ce choix présente ses avantages. En effet, une fois la distance à parcourir pour amener tous les élèves de leur zone à leur école réduite à son minimum, on réduit automatiquement le transport et donc les coûts associés au transport scolaire.

La fonction objectif est donc

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k d_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

Les contraintes

Les affectations de zones La construction des secteurs scolaires passe par la phase cruciale d'affectation des zones aux écoles. Chaque affectation est faite de façon à préserver la contiguïté géographique, sociale ou ethnique des populations. Toute zone de la région sera donc assignée à une et une seule école. On ne veut pas de zones divisées entre deux écoles ni de zones non assignées. En vertu de la définition des variables x_{ij} , on satisfait à ces conditions en imposant les contraintes

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.2)$$

La capacité normative des écoles L'occupation des locaux dans les écoles est régie par des normes sur le nombre maximum d'élèves dans une classe. Dans les affectations, chaque élève d'une zone i assignée à une école j doit avoir une place dans une classe de son niveau sans que la capacité maximale requise pour ce niveau ne soit dépassée. On modélise ces contraintes de la façon suivante

$$\sum_{i=1}^m P_i^k x_{ij} - m_k y_{kj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad k = 1, \dots, q. \quad (1.3)$$

La capacité physique des écoles Pour chaque école, le nombre de classes nécessaires pour le recrutement des élèves ne doit pas excéder le nombre de locaux disponibles dans cette école. En d'autres termes, l'école ne peut prendre plus d'élèves que sa capacité ne le permette, ce qui se traduit par les contraintes

$$\sum_{k=1}^q y_{kj} \leq N^j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

La contiguïté des secteurs scolaires L'une des grandes exigences du problème est la contiguïté des secteurs scolaires. Une fois les affectations faites, on ne veut pas obtenir un

secteur avec des zones isolées. Dans un secteur, passer d'une zone à l'autre doit se faire sans risque de traverser un autre secteur.

Dans les quatre approches de résolution du problème que nous présenterons dans les prochains chapitres, on utilisera soit un modèle sans contrainte explicite de contiguïté, en prenant soin toutefois d'inclure de façon implicite la notion de contiguïté dans les procédures que nous développerons dans la suite pour les affectations de zones, soit un modèle avec une contrainte explicite de contiguïté que nous introduirons plus tard.

Notre modèle de répartition (P) sans contrainte de contiguïté est le suivant

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k d_{ij} x_{ij} \\ \text{sous} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m P_i^k x_{ij} - m_k y_{kj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, q, \\ \sum_{k=1}^q y_{kj} \leq N^j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ variable entière, } j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, q. \end{array} \right.$$

CHAPITRE 2

PREMIÈRE HEURISTIQUE

Nous présentons dans ce chapitre une heuristique dont les structures sont influencées par les travaux de Jacques Ferland et G. Guénette de 1990 [4] d'une part et H. Mine, K. Ohno et I. Miyaji de 1982 [7] d'autre part. On dispose d'une région géographique constituée de m zones et n écoles sur laquelle une commission scolaire a juridiction. Le programme linéaire (P) affecte chacune de ces zones à exactement une école pour constituer des secteurs scolaires. Chaque secteur étant intimement lié à une école, il faudra respecter

- le nombre permis d'élèves par niveau,
- la capacité physique des écoles et aussi
- la contiguïté des secteurs scolaires.

Le programme linéaire (P) introduit au chapitre précédent ne contient pas de contrainte de contiguïté. Ceci suppose qu'une résolution directe de (P) par des algorithmes classiques de programmation mixte en nombres entiers ne garantit aucunement, dans le cas où c'est possible, des secteurs contigus. Ceci est clair vu que la recherche d'une répartition de distance minimale dans le modèle (P) ne tient pas compte du fait qu'une zone soit isolée de son secteur. Le programme linéaire (P) n'inclut pas la contrainte de contiguïté et une

résolution directe de (P) n'en tiendra pas compte aussi. L'idée sera donc d'inclure dans les procédures de résolution du programme (P) des tests de contiguïté qui éviteront des solutions avec des secteurs non contigus. L'heuristique que nous allons présenter va donc utiliser une procédure d'affectation de zones qui tienne compte de ce critère de contiguïté.

2.1 Relaxation du programme linéaire (P)

Pour le programme linéaire (P), les contraintes qui risquent d'être violées le plus souvent sont celles sur les capacités physique et normative. On définit pour chacune d'elles deux mesures de dépassement MD1 et MD2 par

$$MD1 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \max(0, \sum_{i=1}^m P_i^k x_{ij} - m_k y_{kj}),$$

$$MD2 = \sum_{j=1}^n \max(0, \sum_{k=1}^q y_{kj} - N^j).$$

La mesure MD1 représente l'excédent total sur le nombre de places disponibles dans toutes les écoles de la région. En d'autres termes, c'est le nombre de places non existantes qu'il faudra créer pour pouvoir satisfaire toute la clientèle étudiante. MD2 représente l'excédent total sur le nombre de locaux disponibles dans le système. C'est le nombre de classes à rendre disponible si on veut satisfaire aux besoins de toute la clientèle étudiante.

Au cours du processus d'affectation, ces deux mesures serviront à juger de l'intérêt d'une solution par rapport à une autre en terme de respect des contraintes de capacités physique et normative.

On introduit alors dans la fonction objectif du modèle (P), un paramètre λ de mesure d'irréalisation (mesure de dépassement) au niveau des contraintes de capacité et on relaxe ces dernières. On obtient le programme (P1) suivant

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \min \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k d_{ij} x_{ij} + \lambda \sum_{j=1}^n \left\{ d_l \sum_{k=1}^q \max(0, \sum_{i=1}^m P_i^k x_{ij} - m_k y_{kj}) \right\} \right. \\ \quad \left. + d_l m_h \max(0, \sum_{k=1}^q y_{kj} - N^j) \right) \\ \text{sous} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_{kj} \geq 0, \quad \text{variable entière}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, q \end{array} \right.$$

où $d_l = \max_{i,j}(d_{ij})$, $m_h = \max_k(m_k)$.

Le modèle (P1) est une relaxation de (P). Il affecte chaque zone de la région à exactement une école en minimisant les dépassements éventuels des moyennes prévues pour chaque classe et le dépassement du nombre de locaux disponibles dans les écoles. Cependant, même si (P1) fournit une solution acceptable, certaines contraintes, entre autres celles sur les capacités physique et normative et celle sur la contiguïté, peuvent ne pas être respectées vu qu'elles ne sont pas considérées explicitement dans (P1), mais traitées implicitement via des termes de pénalités introduits dans la fonction objectif. L'heuristique que nous allons utiliser pour résoudre le programme (P) sera donc à deux volets.

1er volet: Trouver une solution contiguë acceptable pour (P1), c'est à dire affecter chaque zone de la région à une et une seule école en réduisant les dépassements au niveau des capacités et la distance totale parcourue dans le système. Le critère principal utilisé est un critère de proximité qui inclut la notion de contiguïté.

2ème volet: Si la solution obtenue au volet 1 n'est pas réalisable pour (P), on va la

rendre réalisable par des mesures de correction des dépassements au niveau des capacités si cela est possible. On essaiera à ce niveau de réduire autant que possible les dépassements afin de rendre la solution réalisable pour le programme (P), ce qui est notre objectif.

2.2 Heuristique d'affectation des zones aux écoles

Notations

La distance de marche est notée d . Elle vaut 1,6 km au Québec et est fixée par la loi sur le transport scolaire. Au delà de cette distance, tout élève doit être transporté de sa zone à son école. Ceci signifie que si $d_{ij} > d$ dans une solution du problème, les élèves de la zone i doivent être transportés à l'école j .

L'ensemble i des zones de la région peut être partitionné en trois groupes qui sont

$$\begin{aligned} W_j &= \{ \text{zones } i \in i / d_{ij} \leq d \text{ et } d_{il} > d, \forall l \neq j \}, \\ Z &= \{ \text{zones } i \in i / d_{ij} \leq d, \text{ pour plus d'une école } j \}, \\ B &= \{ \text{zones } i \in i / d_{ij} > d, \forall j \}. \end{aligned}$$

L'ensemble W_j pour l'école j est constitué de zones se trouvant dans le rayon de marche de cette seule école j . L'ensemble Z est constitué de toutes les zones se trouvant dans le rayon de marche d'au moins deux écoles. L'ensemble B est constitué des zones extérieures au rayon de marche de toutes les écoles. On peut donc écrire

$$I = (\cup_{j=1}^n W_j) \cup Z \cup B.$$

Le secteur scolaire de l'école j est noté S_j . La population de niveau k dans le secteur S_j est notée $\text{Population}\{(S_j)^k\}$.

Idée de l'heuristique

L'heuristique utilisera les données suivantes: les zones de toute la région, le réseau routier, les capacités physique et normative des écoles. Nous ferons d'abord une description sommaire des deux volets. Par après, l'heuristique sera clairement énoncée.

Volet 1: affectation des zones aux écoles

Le volet 1 comprend deux niveaux. Le premier niveau est celui de la construction du cœur de chaque école, le cœur étant constitué de zones se trouvant dans le rayon de marche de l'école. Le second niveau consistera à construire les secteurs scolaires en décidant de l'affectation du reste des zones.

1. Construction du cœur

Pour chaque école j , on va obliger les élèves de W_j à aller dans cette école. Ce choix a trois avantages qui sont:

- réduire le temps de calcul,
- réduire le transport scolaire vu que les élèves se trouvant dans le rayon de marche d'une école ne sont pas transportés et
- maximiser la contiguïté vu le fait que tout le voisinage immédiat de l'école y est affecté.

Cette obligation se traduit en posant

$$\forall i \in W_j, \quad x_{ij} = 1 \quad \text{et} \quad x_{il} = 0, \quad \forall l \neq j.$$

2. Construire les secteurs scolaires

a) Affectation des zones de Z

Chaque zone de Z se situe dans le rayon de marche d d'au moins deux écoles. On affectera chacune à l'école la plus proche si ses capacités le permettent, c'est à dire si l'école a assez de places disponibles pour accueillir les élèves de cette nouvelle zone. Sinon, parmi les autres écoles pour lesquelles la zone i est intérieure au rayon de marche d , l'affecter à l'école la plus proche disponible. Si aucune de ces écoles n'est disponible, affecter la zone à l'école la plus proche en autorisant les dépassements de capacités. Ce choix a deux avantages qui sont

- réduire le transport scolaire et
- maximiser la contiguïté.

Cette obligation se traduit en posant

$$\forall i \in Z, \exists j \text{ tel que } x_{ij} = 1$$

où j est l'unique école retenue parmi toutes les écoles pour lesquelles la zone i est intérieure au rayon de marche.

b) Affectation des zones de B

Chaque zone de B est extérieure au rayon de marche d de toutes les écoles. Leurs affectations se feront de la façon suivante. Chaque zone est affectée à l'école la plus proche si ses capacités le permettent. Autrement, on affecte la zone à l'école dont la capacité est la moins dépassée par l'ajout de cette zone à son secteur et où certaines zones voisines de la zone en question ont été déjà affectées. Ce choix a l'avantage de maximiser la contiguïté.

Volet 2: correction des excès

La correction des excès est très importante. Elle servira à améliorer la solution obtenue au volet 1 en la rendant réalisable pour (P). On travaillera d'une part à réduire les mesures de dépassement MD1 et MD2 et d'autre part à maintenir stable ou à diminuer la distance totale parcourue dans le système. Ce volet comporte deux étapes:

étape 1- échanges de zones entre secteurs voisins

Les échanges de zones se font principalement avec les zones sur la frontière. L'heuristique détermine, pour les secteurs dont les capacités ont été dépassées, s'il est plus avantageux de garder une zone dans le secteur où elle se trouve ou de la réaffecter ailleurs. Le but visé est de réduire l'excédent de population dans une école.

étape 2- échanges d'adresses entre secteurs voisins

Une fois l'étape 1 d'échanges de zones terminée, on vérifie s'il y a des dépassements qui persistent au niveau de certains secteurs scolaires. Si tel est le cas, l'heuristique décide, pour les zones sur la frontière de ce secteur, de réassigner certaines de leurs adresses à une autre zone d'un secteur voisin où il y a des places disponibles. Le but visé est d'éliminer si possible les dépassements restants en exploitant les places restantes dans les autres écoles de la région. La décision d'échange repose sur deux critères. 1) La diminution des mesures de dépassement, le but visé étant de trouver rapidement une solution réalisable pour (P) et 2) la diminution de la distance totale parcourue dans le système, l'idée étant de minimiser la distance totale parcourue dans tout le système et donc de réduire le coût du transport scolaire.

Heuristique

VOLET 1: affectation des zones aux écoles

Phase 1: construction du cœur

1. Début.

$j = 1$. Aller à 2.

2. Initialisation.

Soit C_j le cœur de l'école j . Posons $C_j := \{j\}$ et aller à 3.

3. Affectation des zones de W_j .

$C_j := C_j \cup W_j$

faire $j = j + 1$.

Si $j \leq n$ retour à 2.

sinon, aller à Phase 2.

Phase 2: Construction des secteurs scolaires

Ranger les zones de Z dans une liste L_z par ordre croissant de distance à l'école la plus proche.

Ranger les zones de B dans une liste L_b par ordre croissant de distance à l'école la plus proche.

4. Début.

Poser $S_j := C_j, \forall j$ et aller à 5.

5. Affectation des zones de Z .

Choisir une zone $i \in L_z$ selon l'ordre. Soit j son école.

Vérifier si $\sum_{k=1}^q \text{Population}\{(S_j \cup \{i\})^k\} / m_k \leq N^j$.

i) Si oui, faire $S_j := S_j \cup \{i\}$. Aller à iii).

ii) Sinon, parmi les autres écoles pour lesquelles la zone i est intérieure au rayon de marche d , l'affecter à l'école la plus proche disponible, c'est à dire à celle qui a assez de places disponibles pour accueillir les élèves de la nouvelle zone. Si aucune de ces écoles ne peut l'accepter sans excéder ses capacités, l'affecter à celle la plus proche sans tenir compte des dépassements. Aller à iii).

iii) Faire $L_z := L_z - \{i\}$.

Si $L_z \neq \phi$, répéter 5.

Si $L_z = \phi$, aller à 6.

6. Affectation des zones de B.

Choisir une zone $i \in L_b$ selon l'ordre. Soit j son école.

Vérifier si $\sum_{k=1}^q \text{Population}\{(S_j \cup \{i\})^k\} / m_k \leq N^j$.

i) Si oui, faire $S_j = S_j \cup \{i\}$. Aller à iii).

ii) Sinon, affecter la zone i à l'école la plus proche dont la capacité est la moins excédée par cette affectation et où certaines zones voisines de i sont déjà affectées. Aller à iii).

iii) Faire $L_b := L_b - \{i\}$.

Si $L_b \neq \phi$, répéter 6.

Si $L_b = \phi$, aller au Volet 2.

VOLET 2: Phase de correction

7. Échange de zones

a) Répertorier les écoles dont les capacités ont été dépassées. Poser

$D := \{j_1, j_2, \dots, j_h\}$ l'ensemble de ces écoles.

Si $D = \phi$, c'est terminé. Il n'y a aucune école dont les capacités ont été dépassées.

Si $D \neq \phi$, choisir une école j_p de D .

b) Trouver les secteurs voisins du secteur S_{j_p} dont les capacités des écoles associées

n'ont pas été atteintes. Soit $VS_{j_p} := \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ l'ensemble de ces secteurs.

Si $VS_{j_p} = \phi$, aller à b3).

Si $VS_{j_p} \neq \phi$, soit $v_q \in VS_{j_p}$.

b1) Prendre une zone frontière de S_{j_p} contiguë au secteur v_q , la réaffecter à v_q si les capacités de l'école j_p le permettent et aller à b2). Sinon, répéter b1) en reprenant une autre zone frontière de S_{j_p} contiguë au secteur v_q . Dans le cas où l'école j_p ne peut recevoir une zone sans excéder ses capacités, faire $VS_{j_p} := VS_{j_p} - \{v_q\}$.

Si $VS_{j_p} \neq \phi$, reprendre un autre secteur v_q puis répéter b). Sinon, aller à b3).

b2) On a les deux cas suivants.

- Si le dépassement au niveau de l'école j_p du secteur S_{j_p} est éliminé, aller à b3).
- Sinon, si les capacités de j_p le permettent, répéter b1) avec le secteur v_q .

Autrement, faire $VS_{j_p} := VS_{j_p} - \{v_q\}$. On va continuer avec un autre secteur de VS_{j_p} .

Si $VS_{j_p} \neq \phi$, prendre un autre secteur v_q et retourner à b1).

Si $VS_{j_p} = \phi$, aller à b3).

b3) Faire $D := D - \{j_p\}$.

Si $D \neq \phi$, choisir une école j_p de D et répéter b).

Si $D = \phi$ aller à 8.

8. Raffinement de la procédure d'échange par des échanges d'adresses

Supposons qu'après la phase d'échange de zones, il y ait encore des secteurs scolaires dont les capacités des écoles associées ont été dépassées. Vu que tous les élèves doivent être assignés à une école en évitant tout dépassement des capacités, cette phase finale de raffinement va pour chaque secteur dont l'école a des capacités dépassées, enlever ses zones frontières et les fractionner entre ce secteur même et les secteurs environnants qui disposent de places disponibles pour accueillir d'autres étudiants. Cette procédure va corriger dans la mesure du possible tous les dépassements de capacité persistants et rendre la solution réalisable pour notre problème.

Soit S_j un secteur débordé.

i) Répertorier les secteurs S_l contigus au secteur S_j et dont les écoles ont des places disponibles. L'ensemble constitué de j et de ces écoles est noté J_c .

ii) Répertorier les zones i de S_j sur la frontière entre S_j et les secteurs S_l . Soit L_I la liste de ces zones.

Pour tout $i \in L_I$, notons T_i l'ensemble des écoles de J_c dont les secteurs sont contigus à la zone i .

Pour tout $j \in J_c$, notons E_j l'ensemble des zones de L_I qui sont contigus au secteur de l'école j .

iii) Enlever de S_j les zones qui appartiennent à L_I . Calculer alors pour toute école p de J_c la quantité n_p égale au nombre de locaux non utilisés dans l'école p et la quantité R_p qui est le vecteur-résiduel donnant le nombre de places restantes par niveau dans les classes déjà utilisées pour l'école p . R_p^k représente donc le nombre de places restantes de niveau k dans les classes déjà utilisées pour l'école p .

iv) Avec ces données, on va constituer un programme linéaire de taille restreinte. Il servira à redistribuer les zones de L_I aux secteurs S_l des écoles de J_c avec possibilité de fractionnement de certaines zones entre deux secteurs voisins. Ce modèle de fractionnement va servir à combler les places restantes à tous les niveaux et dans toutes les écoles avec les surplus de population dans certaines écoles. Précisons que dans cette phase, une zone i ne peut être affectée ou n'être fractionnée qu'entre des écoles de T_i .

Notre modèle de fractionnement que nous notons (MF) est donc le suivant

$$(MF) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i \in L_I} \sum_{j_i \in T_i} \sum_{k=1}^q P_i^k d_{ij} x_{ij} \\ \text{sous} \\ \sum_{j \in T_i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in L_I, \\ \sum_{i \in E_j} P_i^k x_{ij} - m_k y_{kj} \leq R_j^k, \quad \forall j \in J_c \text{ et } k=1, \dots, q, \\ \sum_{k=1}^q y_{kj} \leq n_j, \quad \forall j \in J_c, \\ x_{ij} \geq 0, \text{ réel}, \quad \forall i \in L_I \text{ et } \forall j \in J_c, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ entier}, \quad \forall j \in J_c \text{ et } k=1, \dots, q. \end{array} \right.$$

2.3 Exemples

Exemple 1 On considère la région géographique de la figure 2.1 où on a $m = 14$ zones, $n = 3$ écoles et $q = 7$ niveaux dans chaque école.

Les trois écoles avec leurs capacités sont les suivantes.

École 1 (Desranleau): $N^1 = 18$ classes.

École 2 (Coeur Immaculé): $N^2 = 33$ classes.

École 3 (Sainte Famille-Laporte): $N^3 = 35$ classes.

Les maximums d'élèves par niveau sont $m_1 = 40$, $m_2 = m_3 = m_4 = 27$,

$m_5 = m_6 = m_7 = 29$.

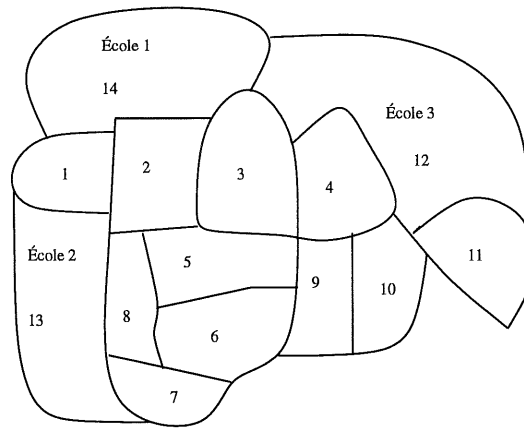


FIG. 2.1: Région constituée de 14 zones et 3 écoles

La position des zones les unes par rapport aux autres et leurs positions par rapport aux écoles de la région sont aussi indiquées sur la figure 2.1.

Les données sur la population étudiante sont résumées dans le tableau 2.1.

	niveau 1	niveau 2	niveau 3	niveau 4	niveau 5	niveau 6	niveau 7
zone 1	18	26	22	22	22	12	5
zone 2	13	15	15	12	8	5	8
zone 3	8	12	12	14	7	12	8
zone 4	9	11	16	5	11	15	12
zone 5	23	24	19	18	10	11	17
zone 6	9	6	7	2	4	5	4
zone 7	1	2	4	2	3	2	1
zone 8	7	8	7	6	3	9	3
zone 9	12	10	16	18	17	10	13
zone 10	13	12	15	19	10	9	5
zone 11	15	13	10	8	11	15	13
zone 12	109	104	106	87	88	85	65
zone 13	74	68	59	52	55	54	51
zone 14	67	47	59	59	66	59	48

TAB. 2.1: Populations étudiantes par zone et par niveau

Les données sur les distances en Km parcourues d'une zone à une école sont résumées dans le tableau 2.2.

	école 1	école 2	école 3
zone 1	2	5	6
zone 2	2	5	6
zone 3	2	5	6
zone 4	2	5	6
zone 5	4	7	8
zone 6	4	7	8
zone 7	5	8	9
zone 8	4	7	8
zone 9	4	7	8
zone 10	4	7	8
zone 11	2	5	6
zone 12	6	12	1.6
zone 13	6	1.6	12
zone 14	1.6	6	6

TAB. 2.2: *Distances de chaque zone à toutes les écoles*

La résolution du problème a été faite en utilisant le code que nous avons élaboré et dont les grandes lignes sont présentées en annexe de ce mémoire.

RÉSULTATS DE LA RÉPARTITION DE LA CLIENTÈLE

La construction des coeurs pour chaque école a donné les résultats suivants.

Le coeur de l'école 1 est constitué uniquement de la zone 14 et la répartition nécessite en tout 18 classes comme indiqué au tableau 2.3. Le coeur de l'école 2 est constitué uniquement de la zone 13 et la répartition nécessite en tout 16 classes comme indiqué au tableau 2.4. Le coeur de l'école 3 est constitué uniquement de la zone 12 et la répartition nécessite en tout 25 classes comme indiqué au tableau 2.5.

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	67	47	59	59	66	59	48
# classes	2	2	3	3	3	3	2

TAB. 2.3: *Coeur de l'école 1*

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	74	68	59	52	55	54	51
# classes	2	3	3	2	2	2	2

TAB. 2.4: *Coeur de l'école 2*

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	109	104	106	87	88	85	65
# classes	3	4	4	4	4	3	3

TAB. 2.5: *Coeur de l'école 3*

Le répertoire des zones de Z avec la distance à l'école la plus proche est vide.

Le répertoire des zones de B avec la distance à l'école la plus proche est représenté au tableau 2.16.

Zone	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
École	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	2	2	2	2	4	4	5	4	4	4	2

TAB. 2.6: *Zones de B*

La répartition après affectation des zones et la phase de 1ère correction (échange de zones entre secteurs) est la suivante.

La zone 14 est affectée à l'école 1. Ce qui nécessite 18 classes comme indiqué dans le tableau 2.7. Les zones 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 13 sont affectées à l'école 2. Ce qui nécessite 34 classes comme indiqué dans le tableau 2.8. Les zones 3, 4, 10, 11, 12 sont affectées à l'école 3. Ce qui nécessite 35 classes comme indiqué dans le tableau 2.9.

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	67	47	59	59	66	59	48
# classes	2	2	3	3	3	3	2

TAB. 2.7: Zones de l'école 1 après la 1ère phase de correction

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	157	159	149	132	122	108	102
# classes	4	6	6	5	5	4	4

TAB. 2.8: Zones de l'école 2 après la 1ère phase de correction

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	154	152	159	133	127	136	103
# classes	4	6	6	5	5	5	4

TAB. 2.9: Zones de l'école 3 après la 1ère phase de correction

Vu qu'on a un dépassement persistant au niveau du secteur scolaire 2 après la phase d'échange, on passe à la 2ème phase de correction. On obtient

$$\begin{aligned}
J_c &= \{1, 2, 3\}, & L_I &= \{1, 2, 5, 9\}, \\
T_1 &= \{1, 2\}, & T_2 &= \{1, 2, 3\}, & T_5 &= \{2, 3\}, & T_9 &= \{2, 3\}, \\
E_1 &= \{1, 2\}, & E_2 &= \{1, 2, 5, 9\}, & E_3 &= \{2, 5, 9\}.
\end{aligned}$$

On fait une marche arrière pour enlever les zones de L_I de leurs secteurs respectifs. On calcule les nombres n_p pour toute école p de J_c et les vecteurs résiduels R_p . Ce qui donne les résultats suivants

$$\begin{aligned}
n_1 &= 0, & R_1 &= (13, 7, 22, 22, 21, 28, 6), \\
n_2 &= 11, & R_2 &= (29, 24, 2, 19, 22, 17, 28), \\
n_3 &= 0, & R_3 &= (6, 10, 3, 2, 18, 9, 13).
\end{aligned}$$

Avec ces données, on va passer à la dernière phase de correction qui est celle du raffinement de la procédure d'échange. Le modèle de fractionnement est le suivant

$$(MF) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser (} 254x_{11} + 635x_{12} + 152x_{21} + 380x_{22} + 456x_{23} + 854x_{52} \\ \quad + 976x_{53} + 672x_{92} + 768x_{93} \text{)} \\ \text{Sous} \\ x_{11} + x_{12} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1, \\ x_{52} + x_{53} = 1, \\ x_{92} + x_{93} = 1, \\ 18x_{11} + 13x_{21} \leq 13, \\ 26x_{11} + 15x_{21} \leq 7, \\ 22x_{11} + 15x_{21} \leq 22, \\ 22x_{11} + 12x_{21} \leq 22, \\ 22x_{11} + 8x_{21} \leq 21, \\ 12x_{11} + 5x_{21} \leq 28, \\ 5x_{11} + 8x_{21} \leq 6, \\ 18x_{12} + 13x_{22} + 23x_{52} + 12x_{92} - 40y_{12} \leq 29, \\ 26x_{12} + 15x_{22} + 24x_{52} + 10x_{92} - 27y_{22} \leq 24, \\ 22x_{12} + 15x_{22} + 19x_{52} + 16x_{92} - 27y_{32} \leq 2, \\ 22x_{12} + 12x_{22} + 18x_{52} + 18x_{92} - 27y_{42} \leq 19, \\ 22x_{12} + 8x_{22} + 10x_{52} + 17x_{92} - 29y_{52} \leq 22, \\ 12x_{12} + 5x_{22} + 11x_{52} + 10x_{92} - 29y_{62} \leq 17, \\ 5x_{12} + 8x_{22} + 17x_{52} + 13x_{92} - 29y_{72} \leq 28, \\ 13x_{23} + 23x_{53} + 12x_{93} \leq 6, \\ 15x_{23} + 24x_{53} + 10x_{93} \leq 10, \\ 15x_{23} + 19x_{53} + 16x_{93} \leq 3, \\ 12x_{23} + 18x_{53} + 18x_{93} \leq 2, \\ 8x_{23} + 10x_{53} + 17x_{93} \leq 18, \\ 5x_{23} + 11x_{53} + 10x_{93} \leq 9, \\ 8x_{23} + 17x_{53} + 13x_{93} \leq 13, \\ y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} + y_{52} + y_{62} + y_{72} \leq 11, \\ \text{Bornes} \\ 0 \leq x_{ij_i} \leq 1, \quad \forall i \in L_I \text{ et } \forall j_i \in T_i, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ entier}, \quad \forall j \in J_c, \text{ et } k = 1, \dots, q. \end{array} \right.$$

La résolution de ce problème donne la solution optimale suivante avec 2.4388574661e+03 comme valeur de la fonction objectif. Les valeurs des variables sont

$$\begin{array}{llll} x_{11} = 0.269231, & x_{12} = 0.730769, & x_{22} = 1, & x_{52} = 1, & x_{92} = 0.995475, \\ x_{93} = 0.004525, & y_{12} = 1, & y_{22} = 2, & y_{32} = 3, & y_{42} = 2, & y_{52} = 1, & y_{62} = 1, \end{array}$$

$$y_{72} = 1.$$

Toutes les autres variables sont égales à 0.

Cette deuxième phase de correction nous permet de régler définitivement le problème des dépassements au niveau des capacités. Les zones 1 et 9 ont été fractionnées en 1^a , 1^b , 9^a , 9^b entre deux secteurs. Pour chacune de ces nouvelles zones, la population par niveau est donné par les vecteurs

$$\text{zone } 1^a = (13, 19, 16, 16, 16, 9, 4),$$

$$\text{zone } 1^b = (5, 7, 6, 6, 6, 3, 1).$$

$$\text{zone } 9^a \cong \text{zone } 9, \quad \text{Population zone } 9^b \cong 0.$$

On obtient ainsi finalement que les zones 14 et 1^b sont affectées à l'école 1. Ce qui nécessite 18 classes comme indiqué dans le tableau 2.10. Les zones 1^a , 2, 5, 6, 7, 8, 9 et 13 sont affectées à l'école 2. Ce qui nécessite 33 classes comme indiqué dans le tableau 2.11. Les zones 3, 4, 10, 11 et 12 sont affectées à l'école 3. Ce qui nécessite 35 classes comme indiqué dans le tableau 2.12.

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	72	54	65	65	72	62	49
# classes	2	2	3	3	3	3	2

TAB. 2.10: Zones de l'école 1 après la répartition

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	152	152	143	126	116	105	101
# classes	4	6	6	5	4	4	4

TAB. 2.11: Zones de l'école 2 après la répartition

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	154	152	159	133	127	136	103
# classes	4	6	6	5	5	5	4

TAB. 2.12: Zones de l'école 3 après la répartition

La région géographique est donc partagée comme indiquée à la figure 2.3.

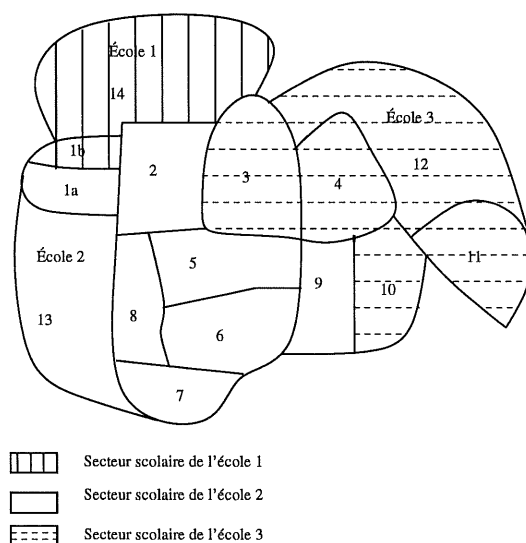


FIG. 2.2: Résultat de la sectorisation 1

Exemple 2. Dans l'exemple précédent, la répartition a été complétée en faisant un fractionnement de zones. Nous allons reprendre le même exemple en ajoutant une classe à l'école Desranleau. Ce qui donne 19 classes au lieu de 18 dans l'exemple 1. L'application de l'heuristique a donné les résultats suivants.

RÉSULTATS DE LA RÉPARTITION DE LA CLIENTÈLE

La construction des coeurs pour chaque école a donné les résultats suivants.

Le coeur de l'école 1 est constitué uniquement de la zone 14 et la répartition nécessite en tout 18 classes comme indiqué au tableau 2.13. Le coeur de l'école 2 est constitué uniquement de la zone 13 et la répartition nécessite en tout 16 classes comme indiqué au tableau 2.14. Le coeur de l'école 3 est constitué uniquement de la zone 12 et la répartition nécessite en tout 25 classes comme indiqué au tableau 2.15.

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	67	47	59	59	66	59	48
# classes	2	2	3	3	3	3	2

TAB. 2.13: *Coeur de l'école 1*

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	74	68	59	52	55	54	51
# classes	2	3	3	2	2	2	2

TAB. 2.14: *Coeur de l'école 2*

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	109	104	106	87	88	85	65
# classes	3	4	4	4	4	3	3

TAB. 2.15: *Coeur de l'école 3*

Le répertoire des zones de Z avec la distance à l'école la plus proche est vide.

Le répertoire des zones de B avec la distance à l'école la plus proche est représenté au tableau 2.16.

Zone	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
École	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	2	2	2	2	4	4	5	4	4	4	2

TAB. 2.16: *Zones de B*

La répartition après affectation des zones et la phase de 1ère correction (échange de zones entre secteurs) est la suivante.

Les zones 2, 14 sont affectées à l'école 1. Ce qui nécessite 19 classes comme indiqué dans le tableau 2.17. Les zones 1, 5, 6, 7, 8, 9, 13 sont affectées à l'école 2. Ce qui nécessite 32 classes comme indiqué dans le tableau 2.18. Les zones 3, 4, 10, 11, 12 sont affectées à l'école 3. Ce qui nécessite 35 classes comme indiqué dans le tableau 2.19.

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	80	62	74	71	74	64	56
# classes	2	3	3	3	3	3	2

TAB. 2.17: *Zones de l'école 1 après la 1ère phase de correction*

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	144	144	134	120	114	103	94
# classes	4	6	5	5	4	4	4

TAB. 2.18: Zones de l'école 2 après la 1ère phase de correction

Niveau	1	2	3	4	5	6	7
Population	154	152	159	133	127	136	103
# classes	4	6	6	5	5	5	4

TAB. 2.19: Zones de l'école 3 après la 1ère phase de correction

La seconde phase de correction qui est celle de fractionnement des zones ne sera plus nécessaire vu qu'on a plus de dépassements de capacités. Les secteurs trouvés sont contigus. La région géographique est ainsi partagée selon la figure 2.3.

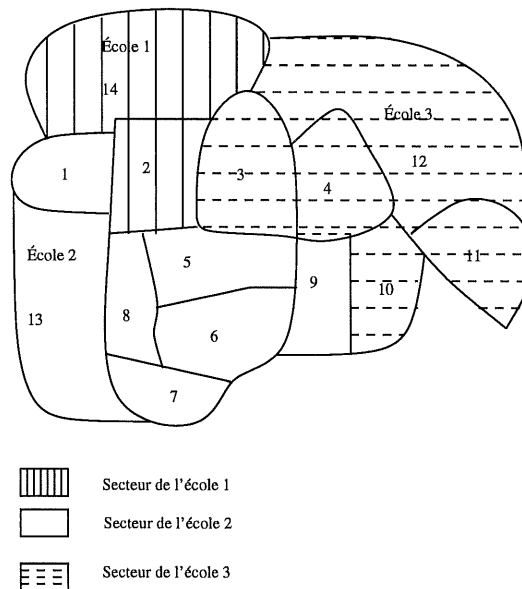


FIG. 2.3: Résultat de la sectorisation 2

CHAPITRE 3

NOUVELLE APPROCHE DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré un modèle (P) qui ne contenait pas explicitement la contrainte de contiguïté sur les secteurs scolaires trouvés. Ceci nous a conduit à développer une approche heuristique pour la résolution du problème où nous avons pris soin d'inclure dans les procédures d'obtention des secteurs scolaires le critère de contiguïté et ce afin d'obtenir une solution qui respecte les exigences du problème dont celle de contiguïté en particulier.

Dans ce chapitre, nous allons ajouter au programme linéaire (P) la contrainte qui modélise la contiguïté des secteurs scolaires. Elle a été développée par Sinha et Zoltner [9] lors de la résolution d'un problème d'alignement de territoires de ventes. Cette contrainte ajoutée au programme linéaire (P) nous donne un modèle complet dans ce sens que toutes les exigences du problème sont modélisées et représentées dans la nouvelle version du modèle (P). Nous allons dans la suite, présenter cette nouvelle contrainte de contiguïté et ensuite proposer une procédure générale de résolution du programme linéaire obtenu.

3.2 La contrainte de contiguïté

La contiguïté des secteurs scolaires est l'une des exigences les plus importantes du problème. Elle signifie qu'un secteur ne peut contenir de zones isolées. Elle est importante car elle permet de réduire le transport scolaire et de maintenir entre les élèves d'une même école des affinités géographique, culturelle et sociale. Sinha et Zoltner, dans le cadre d'un problème d'alignement de territoires, ont développé cette contrainte que nous allons introduire dans la suite.

Décrivons brièvement le problème d'alignement de territoires. Considérons une région géographique où se trouvent n vendeurs dont le but est de se partager les clients de la région. Pour atteindre cet objectif, on procède de la façon suivante. On morcelle la région en petits secteurs appelés unités de ventes. Le partage de la clientèle s'en suit en affectant chacune de ces unités aux vendeurs pour ainsi former des territoires de vente pour chacun d'eux. Un alignement est jugé acceptable quand

- chaque unité de vente est assignée à un seul vendeur,
- l'ensemble des unités de vente assignées à un vendeur respecte les capacités d'offre de ce vendeur
- et chaque territoire de vente est contigu.

De plus, le territoire contient le bureau du vendeur. Aussi, on considère que chaque vendeur peut offrir différents types de services. Ce problème est très similaire au nôtre en considérant les unités de vente comme les zones, le bureau de chaque vendeur comme une école, et les différents types de service comme les niveaux dans une école.

Dans la suite, on parlera d'écoles au lieu de vendeurs, de zones au lieu d'unités de ventes et de niveaux au lieu de services.

La contiguïté s'appuie sur la notion d'arbre d'adjacence. Pour créer l'arbre d'adjacence, on associe à la région géographique un réseau routier dont les noeuds sont les zones et

les arêtes, les routes qui relient directement deux zones distinctes. Ceci permettra de déterminer les plus courts chemins entre les écoles et les zones environnantes. Dans la figure 3.1 tiré de l'article de Sinha et Zoltner, on représente une telle région géographique où les parties ombragées sont des obstacles naturels. Le centre d'un territoire de vente est dans la zone 6.

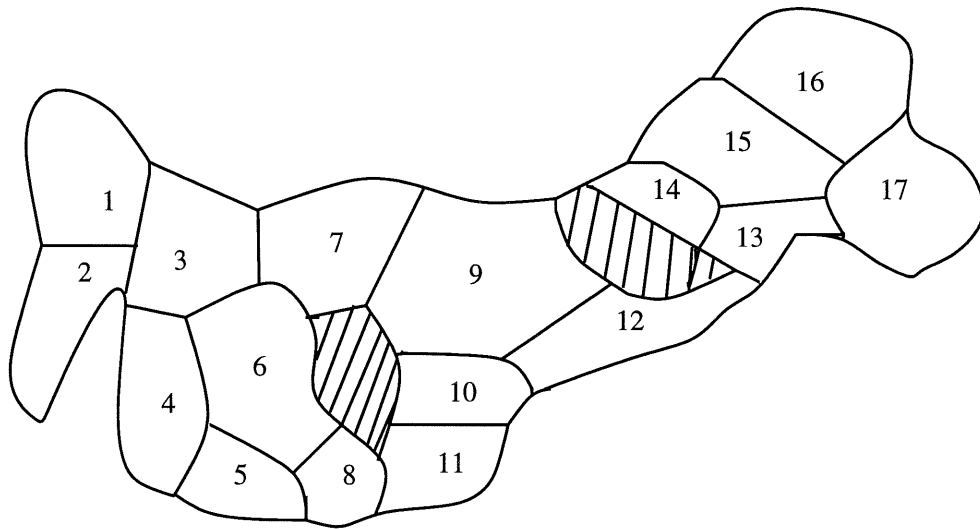


FIG. 3.1: Région constituée de 17 unités de ventes avec un centre de vente dans la zone numéro 6

La figure 3.2 tiré aussi de l'article de Sinha et Zoltner représente le réseau routier associé à la région géographique de la figure 3.1.

3.3 Définitions et propositions

Définition 1 L'arbre d'adjacence est un graphe dont la racine est la zone-école et les noeuds les autres zones candidates à entrer dans le secteur de cette école.

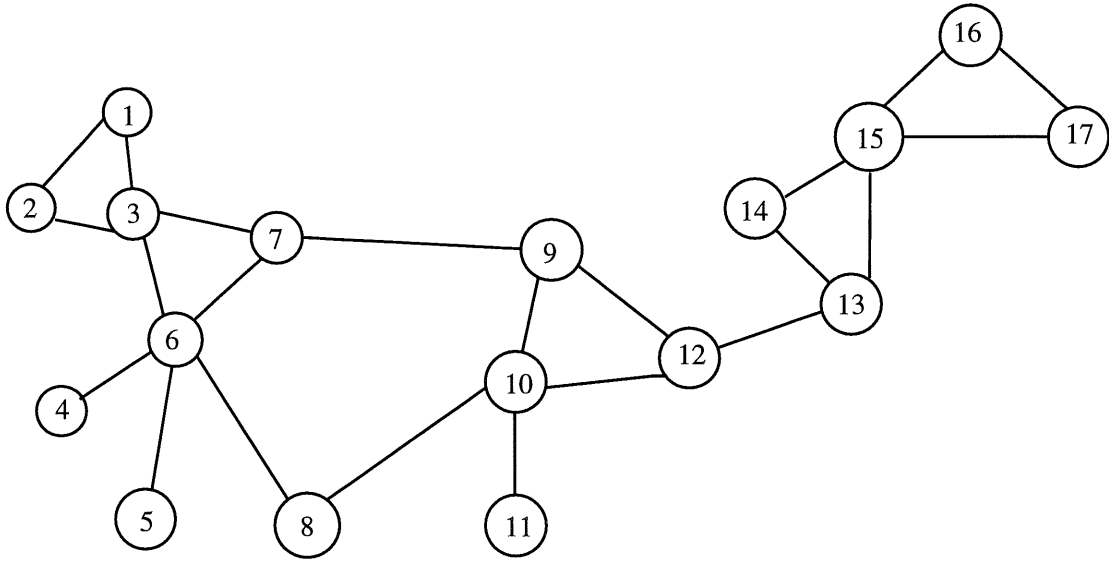


FIG. 3.2: Le réseau routier associé à la région géographique

Définition 2 Le niveau d'adjacence est le nombre de zones sur le plus court chemin entre une zone et une zone-école (une zone-école est toute zone qui contient une école).

On parlera aussi d'éloignement de la zone par rapport à l'école.

La figure 3.3 tiré de l'article de Sinha et Zoltner représente l'arbre d'adjacence associé à la région géographique de la figure 3.1.

Soit D le dernier niveau d'adjacence dans l'arbre d'adjacence des zones associées à une école. Selon Sinha et Zoltner [9], la contiguïté de l'ensemble des zones affectées à cette école est assurée si et seulement si pour toute zone i assignée à l'école j , k étant la position de la zone i dans l'arbre ($0 \leq k \leq D$), i a son prédécesseur immédiat au niveau $k-1$ aussi affectée à cette école.

En d'autres termes, la zone i est assignée à l'école j seulement si l'unique zone l qui précède la zone i dans l'arbre d'adjacence lié à cette école j y est assignée.

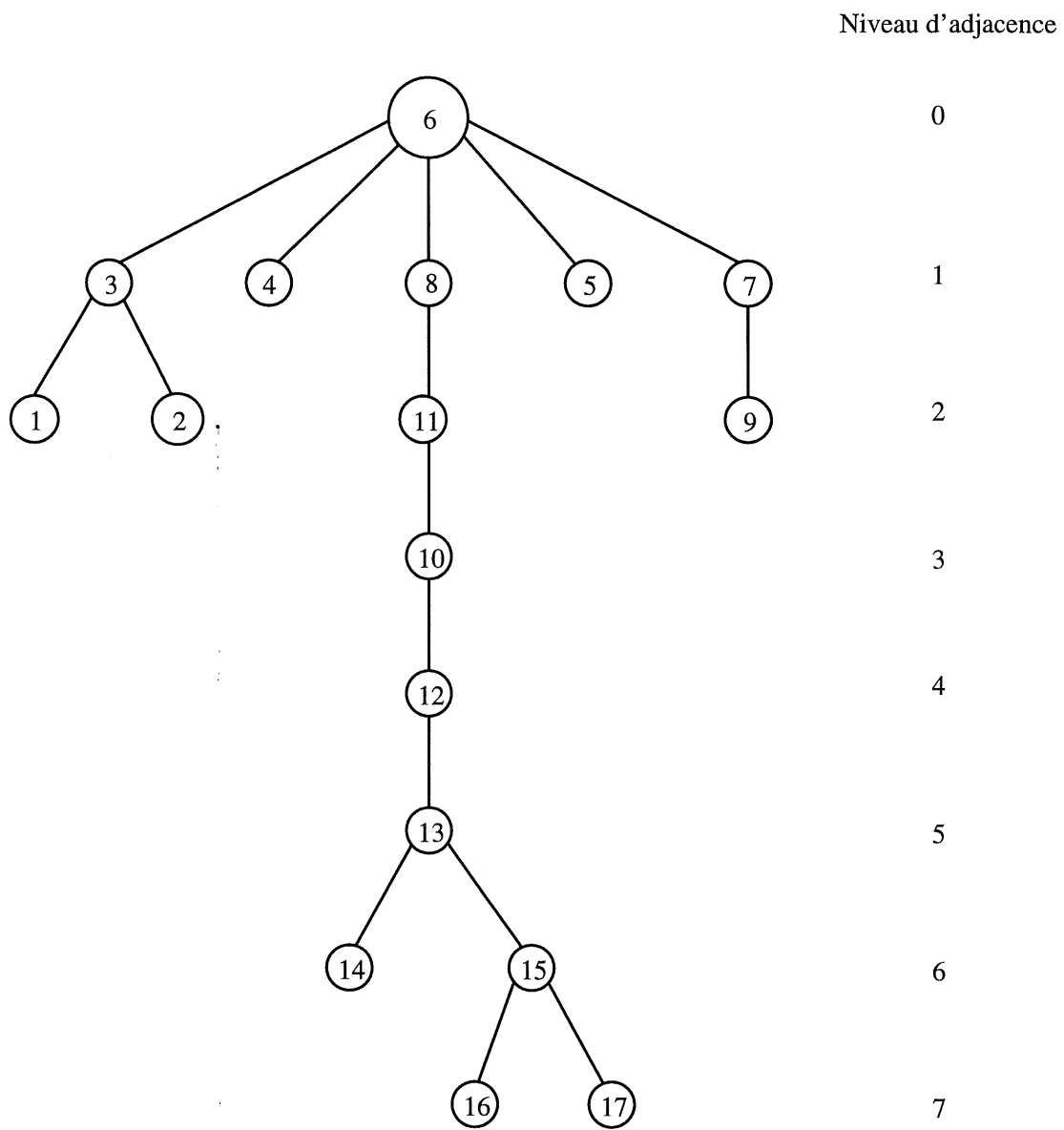


FIG. 3.3: *Arbre d'adjacence des plus courts chemins*

Formulation Soit A_{ij} l'ensemble dont l'unique élément est la zone qui précède immédiatement la zone i dans l'arbre d'adjacence des zones associées à l'école j .

Rappelons que x_{ij} vaut 1 si la zone i est affectée à l'école j et 0 sinon. On formule la contrainte de contiguïté de la façon suivante

$$x_{ij} \leq x_{lj}, \quad \forall i, j \text{ et } l \in A_{ij}. \quad (3.1)$$

Remarque 1 L'arbre d'adjacence basé sur les plus courts chemins a un défaut. Il établit des accès rigides et la contrainte de contiguïté qu'elle génère tient compte seulement du seul plus court chemin entre une zone et une école. Cette façon de faire limite énormément les solutions réalisables possibles vu qu'on évite certains chemins qui, bien que n'étant pas le plus court chemin, créeraient des solutions qui satisferaient à plusieurs autres critères aussi importants que la minimisation de la distance parcourue, par exemple, le respect des contraintes de capacités.

L'arbre d'adjacence des plus courts chemins ne permet pas de telles alternatives. D'où l'idée de Sinha et Zoltner d'inclure dans l'arbre d'adjacence des plus courts chemins, des chemins alternatifs pour obtenir un arbre aussi proche de l'arbre optimal des plus courts chemins mais avec plus de possibilités. C'est l'arbre hiérarchique d'adjacence. L'ajout des chemins alternatifs dépend de l'expérience du décideur qui connaît bien les enjeux et a l'expérience des répartitions antérieures. Selon les auteurs, ce nouvel arbre maintient toujours la contiguïté. La figure 3.4 représente l'arbre hiérarchique d'adjacence lié à la région géographique de la figure 3.1.

Se basant sur les remarques précédentes, on perçoit la contiguïté de la façon suivante: la contiguïté de l'ensemble des zones affectées à une école est assurée si et seulement si pour toute zone i assignée à l'école j , k étant la position de la zone i ($0 \leq k \leq D$), i a au moins une de ses prédécesseurs immédiats au niveau $k-1$ aussi affectées à cette école. En d'autres termes, une zone i ne peut être affectée à une école j que si au moins une de ses prédécesseurs immédiats est aussi affectée à cette école.

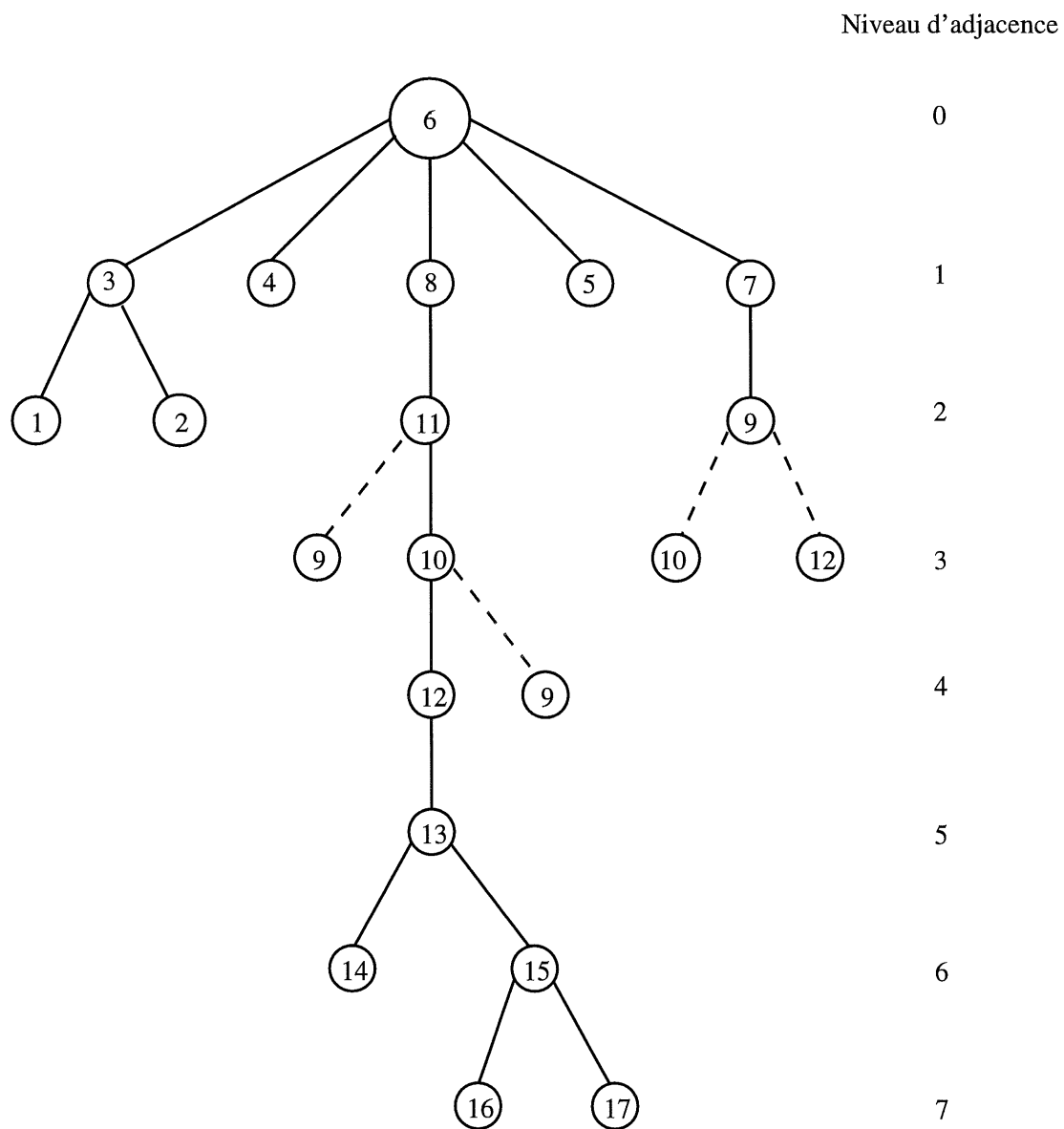


FIG. 3.4: *Arbre hiérarchique d'adjacence*

Formulation Soit A_{ij} l'ensemble des zones qui précèdent immédiatement la zone i dans l'arbre hiérarchique d'adjacence des zones associées à l'école j . On a

$$x_{ij} - \sum_{l \in A_{ij}} x_{lj} \leq 0, \quad \forall i, j. \quad (3.2)$$

En ajoutant au problème (P) la contrainte 3.2 sur la contiguïté, on obtient le modèle suivant

$$(PC) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k d_{ij} x_{ij} \\ \text{sous} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m P_i^k x_{ij} - m_k y_{kj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, q, \\ \sum_{k=1}^q y_{kj} \leq N^j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} - \sum_{l \in A_{ij}} x_{lj} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ entier}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, q. \end{array} \right.$$

3.4 Le problème de la contrainte de contiguïté

Contrairement à ce que disent Sinha et Zoltner dans leur article, la contrainte de contiguïté (3.2) du problème (PC) n'est pas toujours valide. On a remarqué que dans certains cas, sa réalisabilité ne garantissait aucunement des secteurs contigus. Même sur l'exemple que les auteurs ont proposés dans leur article (voir figure 3.1), le secteur $\{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ avec l'école dans la zone 6 vérifie la contrainte de contiguïté (3.2) alors que dans la réalité, ce secteur n'est pas contigu. Où se situe le problème de la contiguïté?

Supposons qu'il existe une école j dont le secteur associé S_j vérifie la contrainte de contiguïté mais que le secteur soit non contigu dans la réalité. Cela signifie qu'il existe une zone $i_1 \in S_j$ et i_1 isolée. Si i_1 est isolée et seule, cela signifie qu'aucune de ces prédécesseurs dans l'arbre hiérarchique d'adjacence n'appartient à S_j , ce qui est impossible étant donné que, par hypothèse, le secteur S_j vérifie la contrainte de contiguïté.

Ceci entraîne qu'il existe au moins une zone $i_2 \in S_j$ et i_2 isolée et contiguë à i_1 . En conclusion, si un secteur S_j vérifie la contrainte de contiguïté mais demeure non contigu dans les faits, cela suppose qu'il y a au moins 2 zones dans son secteur scolaire qui sont isolées et contiguës.

La première contrainte de contiguïté (inégalité 3.1) qu'on a présenté découlait du graphe d'adjacence des plus courts chemins et donne bien des secteurs contigus. L'ajout de chemins alternatifs à ce graphe pour former l'arbre hiérarchique d'adjacence a créé des circuits entre certaines zones (c'est le cas de i_1 et i_2). Ce circuit fait que la zone i_1 se comporte dans l'arbre hiérarchique comme un prédécesseur de la zone i_2 et réciproquement la zone i_2 se comporte comme un prédécesseur de i_1 . Cette situation permettra de satisfaire la contrainte de contiguïté pour (i_1, j) et (i_2, j) sans maintenir cette contiguïté dans la réalité. Cette carence de la contrainte de contiguïté est très grave. Elle implique que

le programme (PC) peut dans certains cas donner une solution qui ne génère pas des secteurs contigus.

Au vu de cette remarque, nous prévoyons une phase de correction qui s'appliquera de la façon suivante. Après résolution du programme linéaire (PC), on vérifie si la solution satisfait le critère de contiguïté. Sinon, on répertorie les écoles dont les secteurs ne sont pas contigus et ensuite les circuits générés par l'arbre hiérarchique d'adjacence au niveau des zones isolées de ces secteurs. On brise les circuits et on réécrit la contrainte de contiguïté pour ces zones. On réoptimise de nouveau le problème.

Procédure générale

1. Construire l'arbre d'adjacence des plus courts chemins. On utilise un algorithme de plus court chemin (type Dijkstra).
2. Construire l'arbre hiérarchique d'adjacence. On ajoutera des chemins alternatifs à l'arbre d'adjacence. S'il y a des circuits visibles, on les brise.
3. Pour chaque zone et pour chaque école, énumérer les zones prédécesseurs. Ceci nous donne les contraintes de contiguïté.
4. Résoudre le programme linéaire (PC).
5. S'il existe un secteur non contigu, corriger le problème en brisant les circuits en jeu. Réécrire les contraintes correspondantes et réoptimiser (PC).
6. Si tous les secteurs sont contigus, FIN.
Sinon, retourner à 5.
FIN.

Cette procédure nous permet de faire une résolution "exacte" du programme linéaire (PC) dans le cas où les capacités physiques des écoles le permettent et d'avoir une solution

optimale à notre problème.

3.5 Exemples

Exemple 1 Nous reprenons exactement l'exemple 1 du chapitre précédent. Les données sont exactement les mêmes. Nous allons d'abord construire les arbres d'adjacence des plus courts chemins auxquels nous allons adjoindre des chemins alternatifs pour constituer les arbres hiérarchiques d'adjacence. Ces arbres liés aux trois écoles sont représentés par les figures 3.5, 3.6 et 3.7. Les chemins alternatifs sont en pointillé.

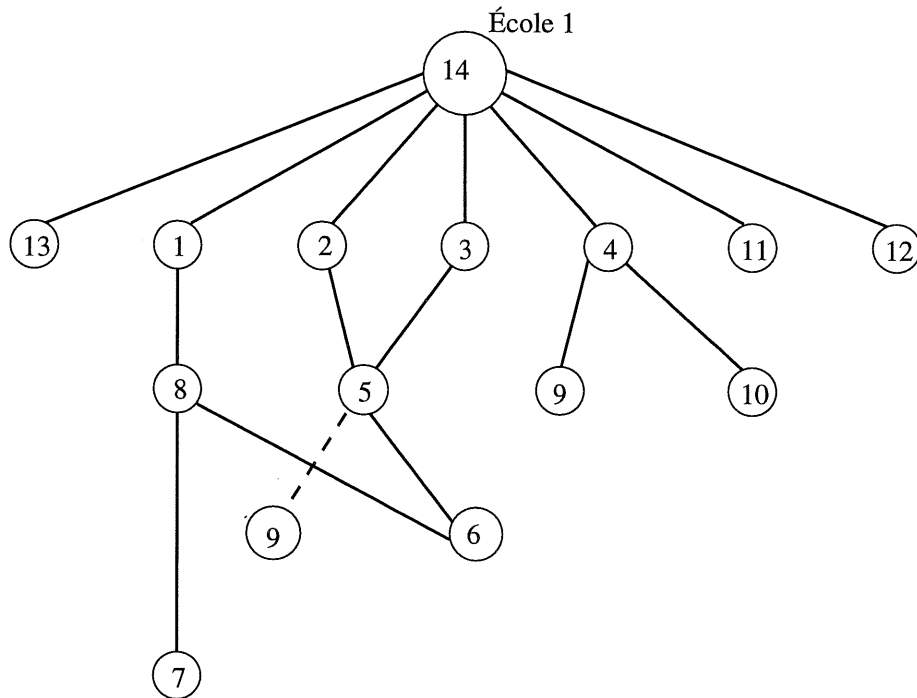


FIG. 3.5: *Arbre hiérarchique d'adjacence lié à l'école 1*

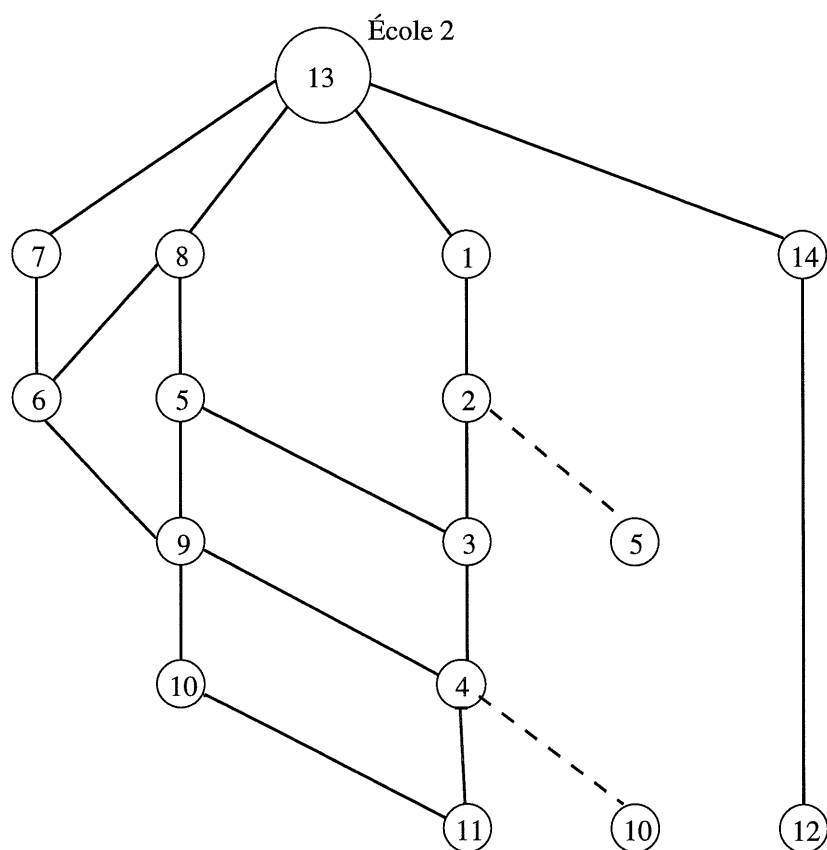


FIG. 3.6: *Arbre hiérarchique d'adjacence lié à l'école 2*

Ces trois arbres nous permettent d'énumérer pour chaque zone et chaque école les prédécesseurs immédiats dans l'arbre hiérarchique d'adjacence. Pour la résolution du programme linéaire (PC) et vu la grande taille du problème, nous avons fait un code en C++ qui nous permet de le générer automatiquement. Les détails sur le code sont donnés en annexe à la fin de ce mémoire. Le programme linéaire à résoudre est le suivant

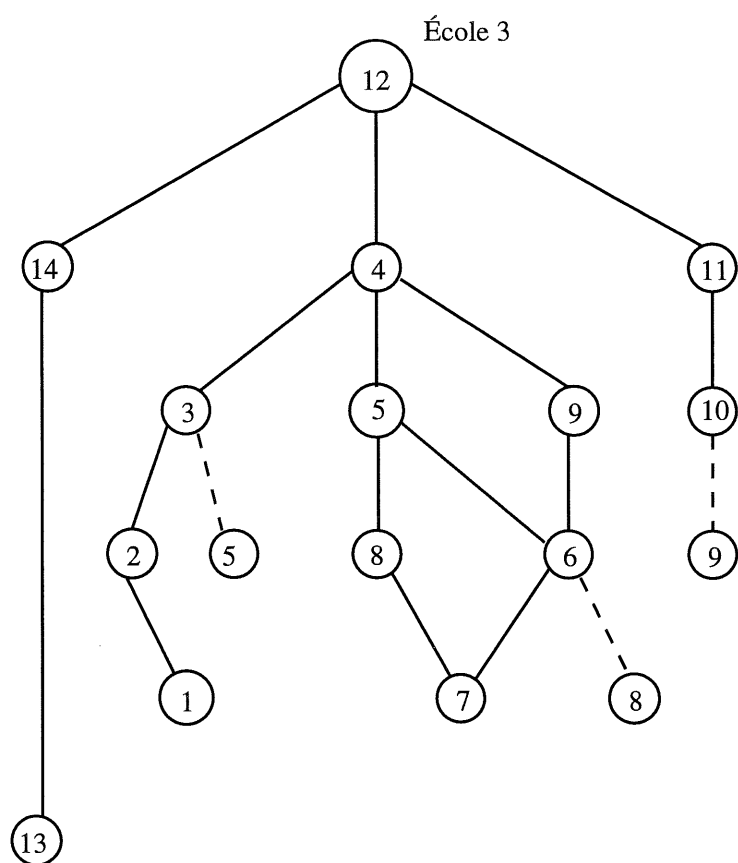


FIG. 3.7: *Arbre hiérarchique d'adjacence lié à l'école 3*

(PC)

Minimiser ($254x_{11} + 635x_{12} + 762x_{13} + 152x_{21} + 380x_{22} + 456x_{23} + 146x_{31} + 365x_{32}$
 $+438x_{33} + 158x_{41} + 395x_{42} + 474x_{43} + 488x_{51} + 854x_{52} + 976x_{53}$
 $+148x_{61} + 259x_{62} + 296x_{63} + 75x_{71} + 120x_{72} + 135x_{73} + 172x_{81}$
 $+301x_{82} + 344x_{83} + 384x_{91} + 672x_{92} + 768x_{93} + 332x_{101} + 581x_{102}$
 $+664x_{103} + 170x_{111} + 425x_{112} + 510x_{113} + 6440x_{121} + 9016x_{122} + 4130x_{131}$
 $+5369x_{133} + 4860x_{142} + 5265x_{143}$)

Sous

$$c1 : x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1,$$

$$c2 : x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1,$$

$$c3 : x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1,$$

$$c4 : x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1,$$

$$c5 : x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1,$$

$$c6 : x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1,$$

$$c7 : x_{71} + x_{72} + x_{73} = 1,$$

$$c8 : x_{81} + x_{82} + x_{83} = 1,$$

$$c9 : x_{91} + x_{92} + x_{93} = 1,$$

$$c10 : x_{101} + x_{102} + x_{103} = 1,$$

$$c11 : x_{111} + x_{112} + x_{113} = 1,$$

$$c12 : x_{121} + x_{122} + x_{123} = 1,$$

$$c13 : x_{131} + x_{132} + x_{133} = 1,$$

$$c14 : x_{141} + x_{142} + x_{143} = 1,$$

$$c15 : 18x_{11} + 13x_{21} + 8x_{31} + 9x_{41} + 23x_{51} + 9x_{61} + x_{71} + 7x_{81} + 12x_{91}$$
$$+13x_{101} + 15x_{111} + 109x_{121} + 74x_{131} + 67x_{141} - 40y_{11} \leq 0,$$

$$c16 : 18x_{12} + 13x_{22} + 8x_{32} + 9x_{42} + 23x_{52} + 9x_{62} + x_{72} + 7x_{82} + 12x_{92}$$
$$+13x_{102} + 15x_{112} + 109x_{122} + 74x_{132} + 67x_{142} - 40y_{12} \leq 0,$$

$$c17 : 18x_{13} + 13x_{23} + 8x_{33} + 9x_{43} + 23x_{53} + 9x_{63} + x_{73} + 7x_{83} + 12x_{93}$$
$$+13x_{103} + 15x_{113} + 109x_{123} + 74x_{133} + 67x_{143} - 40y_{13} \leq 0,$$

$$c18 : 26x_{11} + 15x_{21} + 12x_{31} + 11x_{41} + 24x_{51} + 6x_{61} + 2x_{71} + 8x_{81} + 10x_{91}$$
$$+12x_{101} + 13x_{111} + 104x_{121} + 68x_{131} + 47x_{141} - 27y_{21} \leq 0,$$

$$c19 : 26x_{12} + 15x_{22} + 12x_{32} + 11x_{42} + 24x_{52} + 6x_{62} + 2x_{72} + 8x_{82} + 10x_{92}$$
$$+12x_{102} + 13x_{112} + 104x_{122} + 68x_{132} + 47x_{142} - 27y_{22} \leq 0,$$

$$c20 : 26x_{13} + 15x_{23} + 12x_{33} + 11x_{43} + 24x_{53} + 6x_{63} + 2x_{73} + 8x_{83} + 10x_{93}$$
$$+12x_{103} + 13x_{113} + 104x_{123} + 68x_{133} + 47x_{143} - 27y_{23} \leq 0,$$

$$c21 : 22x_{11} + 15x_{21} + 12x_{31} + 16x_{41} + 19x_{51} + 7x_{61} + 4x_{71} + 7x_{81} + 16x_{91}$$
$$+15x_{101} + 10x_{111} + 106x_{121} + 59x_{131} + 59x_{141} - 27y_{31} \leq 0,$$

$$c22 : 22x_{12} + 15x_{22} + 12x_{32} + 16x_{42} + 19x_{52} + 7x_{62} + 4x_{72} + 7x_{82} + 16x_{92}$$
$$+15x_{102} + 10x_{112} + 106x_{122} + 59x_{132} + 59x_{142} - 27y_{32} \leq 0,$$

$$c23 : 22x_{13} + 15x_{23} + 12x_{33} + 16x_{43} + 19x_{53} + 7x_{63} + 4x_{73} + 7x_{83} + 16x_{93}$$
$$+15x_{103} + 10x_{113} + 106x_{123} + 59x_{133} + 59x_{143} - 27y_{33} \leq 0,$$

$$\begin{aligned}
c24 : & 22x_{11} + 12x_{21} + 14x_{31} + 5x_{41} + 18x_{51} + 2x_{61} + 2x_{71} + 6x_{81} + 18x_{91} \\
& + 19x_{101} + 8x_{111} + 87x_{121} + 52x_{131} + 59x_{141} - 27y_{41} \leq 0, \\
c25 : & 22x_{12} + 12x_{22} + 14x_{32} + 5x_{42} + 18x_{52} + 2x_{62} + 2x_{72} + 6x_{82} + 18x_{92} \\
& + 19x_{102} + 8x_{112} + 87x_{122} + 52x_{132} + 59x_{142} - 27y_{42} \leq 0, \\
c26 : & 22x_{13} + 12x_{23} + 14x_{33} + 5x_{43} + 18x_{53} + 2x_{63} + 2x_{73} + 6x_{83} + 18x_{93} \\
& + 19x_{103} + 8x_{113} + 87x_{123} + 52x_{133} + 59x_{143} - 27y_{43} \leq 0, \\
c27 : & 22x_{11} + 8x_{21} + 7x_{31} + 11x_{41} + 10x_{51} + 4x_{61} + 3x_{71} + 3x_{81} + 17x_{91} \\
& + 10x_{101} + 11x_{111} + 88x_{121} + 55x_{131} + 66x_{141} - 29y - 51 \leq 0, \\
c28 : & 22x_{12} + 8x_{22} + 7x_{32} + 11x_{42} + 10x_{52} + 4x_{62} + 3x_{72} + 3x_{82} + 17x_{92} \\
& + 10x_{102} + 11x_{112} + 88x_{122} + 55x_{132} + 66x_{142} - 29y - 52 \leq 0, \\
c29 : & 22x_{13} + 8x_{23} + 7x_{33} + 11x_{43} + 10x_{53} + 4x_{63} + 3x_{73} + 3x_{83} + 17x_{93} \\
& + 10x_{103} + 11x_{113} + 88x_{123} + 55x_{133} + 66x_{143} - 29y - 53 \leq 0, \\
c30 : & 12x_{11} + 5x_{21} + 12x_{31} + 15x_{41} + 11x_{51} + 5x_{61} + 2x_{71} + 9x_{81} + 10x_{91} \\
& + 9x_{101} + 15x_{111} + 85x_{121} + 54x_{131} + 59x_{141} - 29y_{61} \leq 0, \\
c31 : & 12x_{12} + 5x_{22} + 12x_{32} + 15x_{42} + 11x_{52} + 5x_{62} + 2x_{72} + 9x_{82} + 10x_{92} \\
& + 9x_{102} + 15x_{112} + 85x_{122} + 54x_{132} + 59x_{142} - 29y_{62} \leq 0, \\
c32 : & 12x_{13} + 5x_{23} + 12x_{33} + 15x_{43} + 11x_{53} + 5x_{63} + 2x_{73} + 9x_{83} + 10x_{93} \\
& + 9x_{103} + 15x_{113} + 85x_{123} + 54x_{133} + 59x_{143} - 29y_{63} \leq 0, \\
c33 : & 5x_{11} + 8x_{21} + 8x_{31} + 12x_{41} + 17x_{51} + 4x_{61} + x_{71} + 3x_{81} + 13x_{91} \\
& + 5x_{101} + 13x_{111} + 65x_{121} + 51x_{131} + 48x_{141} - 29y_{71} \leq 0, \\
c34 : & 5x_{12} + 8x_{22} + 8x_{32} + 12x_{42} + 17x_{52} + 4x_{62} + x_{72} + 3x_{82} + 13x_{92} \\
& + 5x_{102} + 13x_{112} + 65x_{122} + 51x_{132} + 48x_{142} - 29y_{72} \leq 0, \\
c35 : & 5x_{13} + 8x_{23} + 8x_{33} + 12x_{43} + 17x_{53} + 4x_{63} + x_{73} + 3x_{83} + 13x_{93} \\
& + 5x_{103} + 13x_{113} + 65x_{123} + 51x_{133} + 48x_{143} - 29y_{73} \leq 0, \\
c36 : & y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} + y_{51} + y_{61} + y_{71} \leq 18, \\
c37 : & y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} + y_{52} + y_{62} + y_{72} \leq 33, \\
c38 : & y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} + y_{53} + y_{63} + y_{73} \leq 35, \\
c39 : & x_{11} - x_{141} \leq 0, \\
c40 : & x_{12} - x_{132} \leq 0, \\
c41 : & x_{13} - x_{23} \leq 0, \\
c42 : & x_{21} - x_{141} \leq 0, \\
c43 : & -x_{12} + x_{22} \leq 0, \\
c44 : & x_{23} - x_{33} \leq 0, \\
c45 : & x_{31} - x_{141} \leq 0, \\
c46 : & -x_{22} + x_{32} - x_{52} \leq 0, \\
c47 : & x_{33} - x_{43} \leq 0, \\
c48 : & x_{41} - x_{141} \leq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c49 : -x_{32} + x_{42} - x_{92} &\leq 0, \\
c50 : x_{43} - x_{123} &\leq 0, \\
c51 : -x_{21} - x_{31} + x_{51} &\leq 0, \\
c52 : -x_{22} + x_{52} - x_{82} &\leq 0, \\
c53 : -x_{43} + x_{53} &\leq 0, \\
c54 : -x_{51} + x_{61} - x_{81} - x_{91} &\leq 0, \\
c55 : x_{62} - x_{72} - x_{82} &\leq 0, \\
c56 : -x_{53} + x_{63} - x_{93} &\leq 0, \\
c57 : -x_{61} + x_{71} - x_{81} &\leq 0, \\
c58 : x_{72} - x_{132} &\leq 0, \\
c59 : -x_{63} + x_{73} - x_{83} &\leq 0, \\
c60 : -x_{21} + x_{81} &\leq 0, \\
c61 : x_{82} - x_{132} &\leq 0, \\
c62 : -x_{53} - x_{63} + x_{83} &\leq 0, \\
c63 : -x_{41} - x_{51} + x_{91} &\leq 0, \\
c64 : -x_{52} - x_{62} + x_{92} &\leq 0, \\
c65 : -x_{43} + x_{93} - x_{103} &\leq 0, \\
c66 : -x_{41} + x_{101} &\leq 0, \\
c67 : -x_{42} - x_{92} + x_{102} &\leq 0, \\
c68 : x_{103} - x_{113} &\leq 0, \\
c69 : x_{111} - x_{141} &\leq 0, \\
c70 : -x_{42} - x_{102} + x_{112} &\leq 0, \\
c71 : x_{113} - x_{123} &\leq 0, \\
c72 : x_{121} - x_{141} &\leq 0, \\
c73 : x_{122} - x_{142} &\leq 0, \\
c74 : -0x_{123} &\leq 0, \\
c75 : x_{131} - x_{141} &\leq 0, \\
c76 : -0x_{132} &\leq 0, \\
c77 : x_{133} - x_{143} &\leq 0, \\
c78 : -0x_{141} &\leq 0, \\
c79 : -x_{132} + x_{142} &\leq 0, \\
c80 : -x_{123} + x_{143} &\leq 0,
\end{aligned}$$

Bornes

$$\begin{aligned}
0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \text{ entier}, \quad \forall i, \forall j, \\
y_{kj} \geq 0, \quad y_{kj} \text{ entier}, \quad \forall k, \forall j.
\end{aligned}$$

Ce problème n'a pas de solution réalisable.

Ceci confirme la solution donnée par l'heuristique du chapitre précédent. En effet, l'heuristique n'a pu résoudre le problème de façon exacte, c'est à dire que toutes les zones de la région n'ont pu être affectées telles qu'elles sont à une école de la région. Il a fallu fractionner certaines zones entre au moins deux secteurs pour compléter totalement les affectations de zones aux écoles.

Exemple 2 On considère maintenant l'exemple 2 du chapitre précédent. On forme le programme linéaire (PC) et on le résoud. On obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned} x_{21} &= x_{141} = 1, & x_{12} &= x_{32} = x_{42} = x_{52} = x_{72} = x_{82} = x_{132} = 1, \\ x_{63} &= x_{93} = x_{103} = x_{113} = x_{123} = 1, \\ y_1 &= 2, & y_2 &= y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 3, & y_7 &= 2, & y_9 &= y_{10} = 6, \\ y_8 &= y_{12} = y_{13} = y_{14} = 4, & y_{15} &= y_{21} = 4, & y_{16} &= y_{17} = 6, \text{ et} \\ y_{18} &= y_{19} = y_{20} = 5, \end{aligned}$$

toutes les autres variables sont égales à zéro.

Le secteur de l'école 1 est constitué des zones 2, 14. Le secteur de l'école 2 est constitué des zones 1, 3, 4, 5, 7, 8, 13. Le secteur de l'école 3 est constitué des zones 6, 9, 10, 11, 12.

La figure 3.8 montre la répartition obtenue.

Remarque Une première comparaison de ces deux approches de solution (l'approche heuristique du chapitre précédent et l'approche "exacte" de ce chapitre) nous permet de faire les remarques suivantes.

Sur l'exemple 1, l'heuristique n'a pu procéder à la répartition finale qu'en passant à un fractionnement de certaines zones. L'approche "exacte" a confirmé cette solution en montrant que le problème ne peut être résolu de façon exacte. On peut donc dire que le dépassement des capacités d'une école lors d'une répartition de clientèles ne signifie

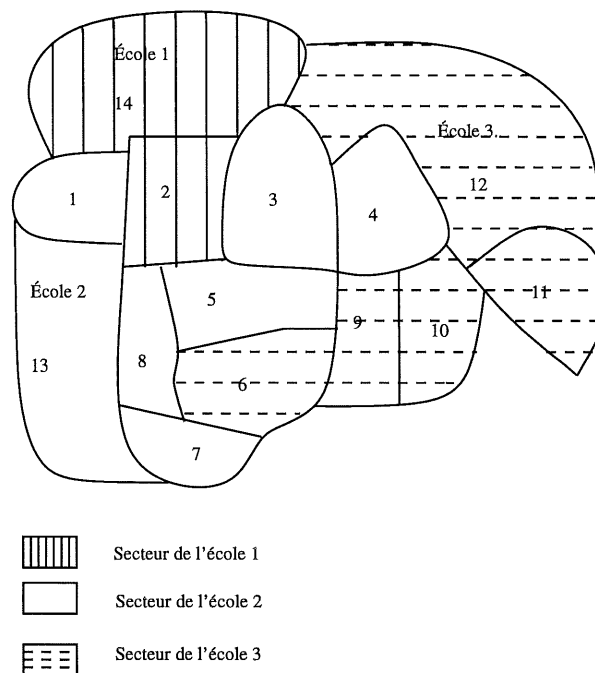


FIG. 3.8: *Résultat de la sectorisation*

pas forcément qu'il faut y construire des nouveaux locaux avant de corriger ce fait. Le problème de dépassements de capacités pouvant découler du fait qu'on ait des macro-zones, l'approche heuristique permet à un moment donné s'il est possible de le faire, de décider de fractionner quelques zones à la frontière des secteurs dont les capacités ont été dépassées pour obtenir des micro-zones. L'affectation de ces micro-zones va permettre l'utilisation des places restantes dans les écoles dont les capacités n'ont pas encore été atteintes. On arrive par là à une utilisation rationnelle des places disponibles et donc on évite les coûts additionnels qu'auraient généré ces dépassements et les investissements éventuels dans la construction.

Sur l'exemple 2, l'heuristique a procédé à la répartition en affectant chaque zone à une et une seule école. L'approche exacte a fait de même. Mais les solutions sont un peu différentes au niveau des secteurs des écoles 2 et 3.

CHAPITRE 4

MÉTHODE À PORTES OUVERTES

4.1 Introduction

Les méthodes de résolution en programmation linéaire, en général, font intervenir très peu le décideur (l'homme d'affaire, l'administrateur, \dots) dans la détermination de la solution finale d'un problème donné. Habituellement, le décideur présente son problème au chercheur et attend que ce dernier propose une solution. Ceci n'est pas grave si le problème peut être résolu à l'optimum en un temps assez raisonnable avec une solution acceptable. Mais généralement et pour plusieurs raisons (données incomplètes ou imprécises, grande taille du problème, \dots), même si on trouve une solution optimale au problème, elle n'est pas forcément valide vu qu'elle peut ne pas refléter la situation en place.

Il s'agira donc d'impliquer le décideur dans la phase de résolution vu qu'il connaît bien le problème afin qu'il puisse juger de l'acceptabilité d'une solution. Les algorithmes qui ouvrent cette brèche au décideur sont dits à portes ouvertes; c'est à dire qu'on ouvre des portes que le décideur peut emprunter pour soit intervenir, soit pour observer la procédure et le processus de résolution.

Le programme linéaire (P) pour sa grande taille et la forte probabilité de ne jamais admettre de solution réalisable peut être classé dans les ordres de problèmes décrits plus hauts.

Nous présentons dans ce chapitre une heuristique dite à portes ouvertes qui permet au décideur d'intervenir d'une manière ou d'une autre dans le processus de détermination de la solution au problème.

4.2 Idée de l'heuristique

Il s'agira de mettre en place une procédure itérative simple permettant d'obtenir une solution complète au problème de répartition qui satisfait

- aux contraintes d'affectation (1.2)
 - et à la contiguïté des secteurs scolaires (1.5),
- mais pour lesquelles un dépassement des capacités physique (1.4) et normative (1.3) des écoles est permis.

4.2.1 Définitions et propositions

1. Une solution complète au problème de répartition qui satisfait (1.2) et (1.5) est un vecteur $X = (x_{ij})$ dont les secteurs scolaires S_j associés vérifient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cup_{j \in J} S_j = I, & (1) \\ S_i \cap S_j = \phi, \quad \forall i, j \in J, i \neq j & (2) \\ S_j \text{ contigu}, \quad \forall j \in J. & (3) \end{array} \right.$$

2. L'ensemble des zones assignées à l'école j à une itération t de notre procédure d'affectation des zones est noté S_j^t .
3. L'ensemble des zones i non encore assignées, adjacentes au secteur S_j^t après l'itération t est noté A_j^t . C'est l'ensemble des zones dans le voisinage immédiat de

S_j^t .

Pour $t = 0$, A_j^0 est égal à la zone captive de l'école j ou encore à la zone-école de l'école j , c'est à dire $A_j^0 = \{i_j\}$.

4. Soit y_{kj}^0 le maximum de locaux à allouer aux classes de niveau k dans l'école j . Alors, $m_k y_{kj}^0$ représente la population étudiante maximale de niveau k dans l'école. On note $a_j^k = m_k y_{kj}^0$ pour tout j et pour tout k .
5. On note $a_j = (a_j^k)$ le vecteur de population maximale pour tous les niveaux.

La procédure que nous allons présenter est une heuristique de voisinage basée sur une méthode itérative. Elle se définit à chaque itération t de la façon suivante

$$S_j^t = S_j^{t-1} \cup K_j^t, \quad \forall j \in J \text{ et } t \geq 1, \quad (4)$$

où $S_j^0 = \phi$ et K_j^t à l'itération t est constitué des zones qu'on adjoint à S_j^{t-1} pour constituer S_j^t .

La figure suivante montre à une itération t_0 les différents ensembles.

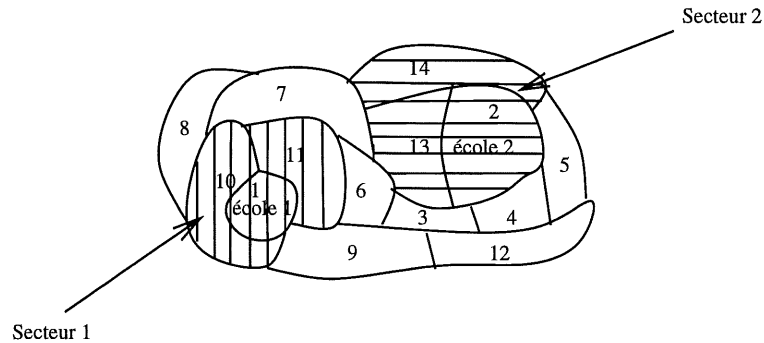


FIG. 4.1: Exemple avec les différents ensembles

On a donc

$$\begin{aligned} S_1^{t_0} &= \{1, 10, 11\}, \quad S_2^{t_0} = \{2, 13, 14\}, \quad A_1^{t_0} = \{6, 7, 8, 9\}, \\ A_2^{t_0} &= \{3, 4, 5, 6, 7\}, \quad K_1^{t_0+1} \subset A_1^{t_0} \text{ et } K_2^{t_0+1} \subset A_2^{t_0}. \end{aligned}$$

Proposition 1 Si à toute itération t les secteurs S_j^t , $j \in J$ tels que définis en (4) satisfont aux conditions (2) et (3), si à chacune de ces itérations $\text{card}(i - \cup_{j \in J} S_j^t)$ décroît strictement, alors il doit exister une itération q finie telle que $\text{card}(i - \cup_{j \in J} S_j^q) = 0$, c'est à dire que $K_j^q = \phi \quad \forall j \in J$, et les secteurs S_j^q pour tout j satisfont aux conditions (1), (2) et (3).

La proposition 1 découle du fait que l'ensemble i des zones est un ensemble fini. Elle signifie que si à chaque itération on assigne au moins une zone de la région à une école, on arrivera à une itération q où il n'y aura plus de zones à assigner. Elle stipule en plus que l'heuristique va se terminer en un nombre fini d'itérations avec une solution satisfaisant (1), (2) et (3).

A chaque itération t , on peut calculer $\cup_{j \in J} S_j^{t-1}$ qui représente l'ensemble des zones déjà affectées à des écoles après l'itération $t-1$, et $\cup_{j \in J} A_j^{t-1}$ qui constitue tout le voisinage immédiat non encore affecté de ces zones déjà affectées après l'itération $t-1$.

Pour ce faire, on va construire un programme (P^t) qui est une relaxation et une restriction de (P) et dont le rôle sera de décider de l'affectation des zones i de $\cup_{j \in J} A_j^{t-1}$ à chaque itération t de notre heuristique. (P^t) est une relaxation de (P) dans ce sens que certaines contraintes de (P) entre autres celles sur les capacités physiques (1.4) n'apparaissent pas dans (P^t) . C'est une restriction de (P) à cause de la diminution du nombre de variables dans (P^t) . Cette diminution du nombre de variables est due au fait que le programme linéaire (P^t) à une itération t ne s'occupe que de l'assignation des zones de l'ensemble $\cup_{j \in J} A_j^{t-1}$ qui constitue tout le voisinage immédiat non encore affecté des

zones déjà affectées après l'itération t-1.

Les affectations se font par étape. À chaque itération, les zones candidates à assignation sont prises dans le voisinage immédiat des secteurs. Ainsi de suite, on affecte chaque zone de la région à exactement un secteur scolaire. Ce choix permet de maximiser la contiguïté, de réduire la distance de chaque zone à son école et donc de réduire le transport scolaire.

Avant d'écrire le modèle (P^t) , remarquons que c'est le décideur qui fournit pour tout niveau k et pour toute école j le nombre y_{kj}^0 précédemment défini et qui représente le nombre maximum de locaux à allouer aux classes de niveau k dans l'école j .

Le programme linéaire (P^t) est le suivant

$$(P^t) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k d_{ij} x_{ij} + M \sum_{j,k} q_{jk} \\ \text{sous} \\ \sum_{j \in \{j/i \in A_j^{t-1}\}} x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i \in \cup_{j \in J} A_j^{t-1}, \\ \\ \sum_{i \in \cup A_j^{t-1}} P_i^k x_{ij} - q_{jk} = \Delta_{jk}^{t-1} \quad , \quad \forall j \in J \text{ et } k=1, \dots, q, \\ \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n \end{array} \right.$$

où la capacité résiduelle de niveau k dans l'école j après l'itération t-1 est notée

$$\Delta_{jk}^{t-1} = a_j^k - \sum_{i \in S_j^{t-1}} P_i^k .$$

Le dépassement de la capacité de niveau k dans l'école j est noté q_{jk} .

On a $M \gg \max_{i,j} (P_i d_{ij})$ où \gg exprime que M est choisi significativement plus grand que le max des $P_i d_{ij}$.

Le programme linéaire (P^t) qu'on résoud à l'itération t affecte chaque zone i de $\cup A_j^{t-1}$ à une unique école j pour laquelle $i \in A_j^{t-1}$ et ce, de façon à minimiser le dépassement

q_{jk} de la capacité résiduelle Δ_{jk}^{t-1} .

Résolution de (P^t)

Le programme linéaire (P^t) décide à toute itération t de l'affectation de chaque zone i de $\cup_{j \in J} A_j^{t-1}$. À cette itération t de la procédure, chaque zone i appartenant à A_j^{t-1} est soit de

type 1: c'est à dire qu'il existe une unique école j telle que $i \in A_j^{t-1}$, soit de

type 2: c'est à dire qu'il existe au moins 2 écoles j telles que $i \in A_j^{t-1}$.

Algorithme de résolution de (P^t)

Étape 1: Affecter chaque zone i de type 1 à son école j en posant

$$x_{ij} = 1 \quad \text{et} \quad x_{ip} = 0, \quad \forall \quad p \neq j.$$

Étape 2: Calculer $\Delta_j^t = (\Delta_{jk}^t)_{k \in K}$ qui est la capacité résiduelle après l'affectation des zones de type 1.

2.1- Si $\Delta_j^t \geq 0$, écrire le programme linéaire (P_R^t) qui n'est que le programme linéaire (P^t) réduit par les conditions de l'étape 1. Aller à l'étape 3.

2.2- S'il existe un niveau k pour lequel $\Delta_{jk}^t < 0$, cela signifie qu'il y a excès au niveau de la capacité maximale requise pour le niveau k dans l'école j .

– **2.2.1-** Tant qu'il y a des places dans les autres écoles, faire une marche arrière et retirer la zone i dernièrement ajoutée au secteur de l'école j de l'ensemble A_j^{t-1} . Poser $A_j^{t-1} := A_j^{t-1} - \{i\}$. Retourner à l'étape 2.

– **2.2.2-** Autrement, laisser la zone i à A_j^{t-1} . Ce qui revient à permettre les dépassements. Aller à l'étape 3.

Étape 3: Résoudre (P_R^t)

C'est un programme linéaire à variables bivalentes qu'on peut résoudre par l'algorithme de Balas ou par un algorithme de subdivisions successives.

Proposition 2 Supposons que l'ensemble K_j^t à une itération t soit constituée des zones i assignées à l'école j dans la solution optimale de P^t . Alors $S_j^t := S_j^{t-1} \cup K_j^t$ satisfait aux conditions (2) et (3) pour toute école j .

Preuve On raisonne par récurrence sur t .

Si $t = 1$, de (4), on a $S_j^1 = K_j^1$ car $S_j^0 = \phi$.

De plus, A_j^0 est constituée par la seule zone-école (zone captive). Et comme les écoles de la région sont distinctes, on a $\cap A_j^0 = \phi$.

A l'itération 1, les zones i à distribuer aux écoles par (P^1) sont celles dans $\cup_{j \in J} A_j^0$. Vu que chaque zone-école i_j est affectée à son école j , on a $i_j \in K_j^1$ pour tout j . Par suite, $S_j^1 = K_j^1 = A_j^0$ satisfait (2) et (3).

Supposons par induction qu'il existe une itération l telle que la proposition 2 soit vraie, c'est à dire que les secteurs S_j^l satisfont (2) et (3).

La relation (4) donne $S_j^{l+1} = S_j^l \cup K_j^{l+1}$, $\forall j$.

De plus, l'hypothèse de la proposition 2 stipule qu'une zone i est assignée à l'école j dans la solution optimale de (P^{l+1}) si et seulement si la zone $i \in K_j^{l+1}$. Or, chaque zone assignée par le programme (P^{l+1}) est dans un A_j^l , c'est à dire contiguë au secteur S_j^l . On en déduit que $S_j^{l+1} = S_j^l \cup K_j^{l+1}$ est un secteur contigu. Il satisfait donc la relation (3).

D'autre part, comme la zone i est assignée dans la solution optimale de (P^{l+1}) , i est assignée à une et une seule école.

Ce qui implique que $\cap K_j^{l+1} = \phi$, $\forall j$. Et comme $\cap S_j^l = \phi$, puisque les S_j^l par hypothèse d'induction satisfont (2), alors $\cap S_j^{l+1} = \phi$.

Ce qui termine la preuve.

Remarque Cette proposition précise beaucoup plus le contenu de l'ensemble K_j^t défini précédemment comme l'ensemble des zones à adjoindre à S_j^{t-1} à l'itération t pour constituer S_j^t . La proposition stipule que dans l'application de l'heuristique de voisinage, l'ensemble K_j^t à l'itération t sera constitué par la solution du programme linéaire (P^t) et ceci donne le secteur S_j^t qui satisfait les conditions (2) et (3).

Proposition 3 Supposons que l'ensemble $\{S_j^t\}_j$ des secteurs scolaires à l'itération t satisfait (2) et (3). Alors les S_j^t satisfont (1) si et seulement si $A_j^t = \phi$, $\forall j$.

Preuve

\Rightarrow

Si les S_j^t pour tout j satisfont (1), cela signifie qu'après l'itération t , toutes les zones i ont été assignées et donc $A_j^t = \phi$, $\forall j$.

\Leftarrow Par contraposition.

Supposons que les S_j^t ne satisfont pas (1). Alors il existe au moins une zone i non encore affectée à une école j . Si i est adjacent à un secteur S_j^t , alors $A_j^t \neq \phi$.

Sinon, i fait partie d'un ensemble de zones non encore assignées, contiguës dont une au moins est adjacente à un S_j^t . Ceci implique que $A_j^t \neq \phi$. Ce qui termine la preuve.

Remarque La proposition 3 stipule que, si à une itération donnée, on trouve un ensemble de secteurs S_j^t satisfaisant les conditions (2) et (3) et s'il n'y a plus de zones à affecter, alors ces S_j^t satisfont aussi à la condition (1). On a donc l'heuristique suivante.

4.3 Heuristique

Étape 1: Initialisation. $S_j^0 = \phi$, $A_j^0 = \{i_j\}$, $\forall i \in J$.

Faire $t = 1$ et aller à l'étape 2.

Étape 2: Résoudre (P^t) . On utilisera l'algorithme de résolution présenté à cet effet.

$\forall j$, écrire $K_j^t = \{\text{zones } i / x_{ij} = 1 \text{ dans la solution optimale de } (P^t)\}$ puis aller à l'étape 3.

Étape 3: Poser $S_j^t := S_j^{t-1} \cup K_j^t \quad \forall j \in J$.

Le décideur observe cette solution partielle et apprécie si elle respecte tous les critères d'acceptabilité surtout ceux non évoqués dans le modèle entre autre la volonté des parents, les affinités sociale et culturelle. S'il y a conflit, on enlève de S_j^t les zones qui causent ce conflit et on continue.

Déterminer ensuite $A_j^t, \quad \forall j \in J$.

Si $A_j^t = \phi \quad \forall j$, fin de l'heuristique.

Sinon, faire $t = t + 1$ et retourner à l'étape 2.

Remarque La solution obtenue par cette heuristique peut ne pas être réalisable pour le problème (P) vu que les contraintes sur les capacités normatives (1.3) et les capacités physiques (1.4) peuvent être violées. Si cela se produit, on travaillera à rendre la solution réalisable à (P) en utilisant le volet 2 de l'heuristique du chapitre 1 qui traite de la correction des dépassements des capacités. Ce volet 2 consiste en un échange de zones entre secteurs voisins et ensuite en un échange d'adresses toujours entre secteurs voisins si besoin est.

4.4 Exemple

On reprend l'exemple 2 du chapitre précédent avec les capacités physiques des classes suivantes

$$N^1 = 19, \quad N^2 = 33, \quad N^3 = 35.$$

Le nombre maximum de locaux à allouer à chaque niveau dans chaque école est fixé comme suit.

Pour l'école 1, on a $y_{11}^0 = 2, y_{21}^0 = y_{31}^0 = y_{41}^0 = y_{51}^0 = y_{61}^0 = 3, y_{71}^0 = 2$.

Pour l'école 2, on a $y_{12}^0 = 4, y_{22}^0 = 6, y_{32}^0 = y_{42}^0 = y_{52}^0 = 5, y_{62}^0 = y_{72}^0 = 4$.

Pour l'école 3, on a $y_{13}^0 = 4, y_{23}^0 = y_{33}^0 = 6, y_{43}^0 = y_{53}^0 = y_{63}^0 = 5, y_{73}^0 = 4$.

Les vecteurs a_1, a_2, a_3 associés à ces nombres sont les suivants

$$a_1 = (80, 81, 81, 81, 87, 87, 58), \quad a_2 = (160, 162, 135, 135, 145, 116, 116),$$

$$a_3 = (160, 162, 162, 135, 145, 145, 116).$$

On applique l'heuristique à ces données.

Étape 1: $S_1^0 = S_2^0 = S_3^0 = \phi$.

$A_1^0 = \{14\}, \quad A_2^0 = \{13\}, \quad A_3^0 = \{12\}$. On fait $t = 1$, aller à l'étape 2.

Étape 2: Résolution de (P^1) . Les trois zones de $\cup A_j^0$ sont de type 1.

Ceci donne $K_1^1 = \{14\}, \quad K_2^1 = \{13\}, \quad K_3^1 = \{12\}$.

La capacité résiduelle $\Delta_j^1 = a_j - \sum_{i \in S_j^1} P_i^k$ après cette première affectation est

$$\Delta_1^1 = (13, 34, 22, 22, 21, 28, 10), \quad \Delta_2^1 = (86, 94, 76, 83, 90, 62, 65),$$

$$\Delta_3^1 = (51, 58, 56, 48, 57, 60, 51).$$

Étape 3: $S_1^1 = \{14\}, \quad S_2^1 = \{13\}, \quad S_3^1 = \{12\},$

$$A_1^1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A_2^1 = \{1, 7, 8\}, \quad A_3^1 = \{4, 11\}.$$

Faire $t = 2$ et retourner à l'étape 2.

Étape 2: Résolution de (P^2)

On assigne d'abord les zones de type 1.

A l'école 1: $\{2, 3\}$, à l'école 2: $\{7, 8\}$, à l'école 3: $\{11\}$.

Les capacités résiduelles deviennent

$$\Delta_1^2 = (-8, 7, -5, -4, 6, 11, -6) , \quad \Delta_2^2 = (78, 84, 65, 75, 84, 51, 61) ,$$

$$\Delta_3^2 = (36, 45, 46, 40, 46, 45, 38) .$$

Il existe un niveau k tel que $\Delta_{1k}^2 < 0$. On fait une marche arrière pour enlever la zone dernièrement ajoutée, ce qui donne $A_1^1 = A_1^1 - \{3\} = \{1, 2, 4\}$.

La capacité résiduelle devient $\Delta_1^2 = (0, 19, 7, 10, 13, 23, 2)$.

Reste à assigner les zones de type 2 c'est à dire les zones 1 et 4. Le modèle réduit (P_R^2) est le suivant

$$(P_R^2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } (254x_{11} + 635x_{12} + 158x_{41} + 474x_{43}) \\ \text{sous} \\ x_{11} + x_{12} = 1, \\ x_{41} + x_{43} = 1, \\ 18x_{11} + 9x_{41} \leq 0, \\ 26x_{11} + 11x_{41} \leq 19, \\ 22x_{11} + 16x_{41} \leq 7, \\ 22x_{11} + 5x_{41} \leq 10, \\ 22x_{11} + 11x_{41} \leq 13, \\ 12x_{11} + 15x_{41} \leq 23, \\ 5x_{11} + 12x_{41} \leq 2, \\ 18x_{12} \leq 78, \\ 26x_{12} \leq 84, \\ 22x_{12} \leq 65, \\ 22x_{12} \leq 75, \\ 22x_{12} \leq 84, \\ 12x_{12} \leq 51, \\ 5x_{12} \leq 61, \\ 9x_{43} \leq 36, \\ 11x_{43} \leq 45, \\ 16x_{43} \leq 46, \\ 5x_{43} \leq 40, \\ 11x_{43} \leq 46, \\ 15x_{43} \leq 45, \\ 12x_{43} \leq 38, \\ \text{Bornes} \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1. \end{array} \right.$$

La résolution nous donne la solution optimale suivante

$$x_{11} = x_{41} = 0, \quad x_{12} = x_{43} = 1$$

.

Donc $K_1^2 = \{2\}$, $K_2^2 = \{7, 8, 1\}$, $K_3^2 = \{12\}$.

Les capacités résiduelles deviennent

$$\Delta_1^2 = (0, 19, 7, 10, 13, 23, 2), \quad \Delta_2^2 = (60, 58, 43, 53, 62, 39, 56),$$

$$\Delta_3^2 = (27, 34, 30, 35, 35, 30, 26).$$

Étape 3: $S_1^2 = \{14, 2\}$, $S_2^2 = \{13, 7, 8, 1\}$, $S_3^2 = \{12, 11, 4\}$.

Le décideur observe la solution. Pas de conflit, on continue.

$A_1^2 = \{3, 5\}$, $A_2^2 = \{5, 6\}$, $A_3^2 = \{3, 9, 10\}$. Faire $t = 3$ et retourner à l'étape 2.

Étape 2: Résolution de (P^3) .

On assigne d'abord les zones de type 1.

A l'école 1: rien, à l'école 2: $\{6\}$, à l'école 3: $\{10, 9\}$.

Les capacités résiduelles deviennent

$$\Delta_1^3 = \Delta_1^2, \quad \Delta_2^3 = (51, 52, 36, 51, 58, 34, 52), \quad \Delta_3^3 = (2, 12, -1, -2, 8, 11, 8).$$

Il existe un niveau k tel que $\Delta_{3k}^3 < 0$. On fait une marche arrière pour enlever la zone dernièrement ajoutée au secteur 3. ce qui donne $A_3^2 = A_3^2 - \{9\} = \{3, 10\}$.

La capacité résiduelle devient $\Delta_3^3 = (14, 22, 15, 16, 25, 21, 21)$.

Reste à assigner les zones de type 2 c'est à dire les zones 3 et 5. On les affecte en résolvant le modèle réduit (P_R^3) suivant

$$(P_R^3) \left[\begin{array}{l} \text{Minimiser } (146x_{31} + 438x_{33} + 488x_{51} + 854x_{52}) \\ \text{sous} \\ x_{31} + x_{33} = 1, \\ x_{51} + x_{52} = 1, \\ 8x_{31} + 23x_{51} \leq 0, \\ 12x_{31} + 24x_{51} \leq 19, \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
12x_{31} + 19x_{51} \leq 7, \\
14x_{31} + 18x_{51} \leq 10, \\
7x_{31} + 10x_{51} \leq 13, \\
12x_{31} + 11x_{51} \leq 23, \\
8x_{31} + 17x_{51} \leq 2, \\
23x_{52} \leq 51, \\
24x_{52} \leq 52, \\
19x_{52} \leq 36, \\
18x_{52} \leq 51, \\
10x_{52} \leq 58, \\
11x_{52} \leq 34, \\
17x_{52} \leq 52, \\
8x_{33} \leq 14, \\
12x_{33} \leq 22, \\
12x_{33} \leq 15, \\
14x_{33} \leq 16, \\
7x_{33} \leq 25, \\
12x_{33} \leq 21, \\
8x_{33} \leq 21, \\
\text{Bornes} \\
x_{ij} = 0 \text{ ou } 1.
\end{array}$$

La résolution nous donne la solution optimale suivante

$$x_{31} = x_{51} = 0, \quad x_{33} = x_{52} = 1.$$

$$\text{D'où } K_1^3 = \phi, \quad K_2^3 = \{6, 5\}, \quad K_3^3 = \{10, 3\}.$$

Les capacités résiduelles deviennent

$$\Delta_1^3 = \Delta_1^2, \quad \Delta_2^3 = (28, 28, 17, 33, 48, 23, 35), \quad \Delta_3^3 = (6, 10, 3, 4, 18, 9, 13).$$

$$\text{Étape 3: } S_1^3 = \{14, 2\}, \quad S_2^3 = \{13, 7, 8, 1, 6, 5\}, \quad S_3^3 = \{12, 11, 4, 10, 3\}.$$

Le décideur observe la solution. Pas de conflit, on continue.

$$A_1^3 = \phi, \quad A_2^3 = \{9\}, \quad A_3^3 = \{9\}.$$

Faire $t = 4$ et retourner à l'étape 2.

Étape 2: Résolution de (P^4)

Il n'y a pas de zones de type 1. La zone 9 est de type 2. On décide de son affectation en

résolvant (P^4) suivant

$$(P^4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } (672x_{92} + 768x_{93}) \\ \text{sous} \\ x_{92} + x_{93} = 1, \\ 12x_{92} \leq 28, \\ 10x_{92} \leq 28, \\ 16x_{92} \leq 17, \\ 18x_{92} \leq 33, \\ 17x_{92} \leq 48, \\ 10x_{92} \leq 23, \\ 13x_{92} \leq 55, \\ 12x_{93} \leq 6, \\ 12x_{93} \leq 10, \\ 16x_{93} \leq 3, \\ 18x_{93} \leq 4, \\ 17x_{93} \leq 18, \\ 10x_{93} \leq 9, \\ 13x_{93} \leq 13, \\ \text{Bornes} \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1. \end{array} \right.$$

La résolution nous donne la solution optimale suivante

$$x_{93} = 0, \quad x_{92} = 1.$$

D'où $K_1^4 = \phi$, $K_2^4 = \{9\}$, $K_3^4 = \phi$.

Les capacités résiduelles deviennent

$$\Delta_1^4 = \Delta_1^2, \quad \Delta_2^4 = (16, 18, 1, 15, 31, 13, 22), \quad \Delta_3^4 = (6, 10, 3, 4, 18, 9, 13).$$

Étape 3: $S_1^4 = \{14, 2\}$, $S_2^4 = \{13, 7, 8, 1, 6, 5, 9\}$, $S_3^4 = \{12, 11, 4, 10, 3\}$.

Le décideur observe la solution. Pas de conflit, on continue.

$A_1^4 = \phi$, $A_2^4 = \phi$, $A_3^4 = \phi$. Ce qui termine la répartition d'après notre dernière proposition. L'heuristique a été complétée en 4 itérations.

En conclusion, on a donc que le secteur de l'école 1 est constitué des zones 2 et 14, le secteur de l'école 2 est constitué des zones 1, 5, 6, 7, 8, 9 et 13, et que le secteur de l'école

3 est constitué des zones 3, 4, 10, 11 et 12.

Il n'y a aucun dépassement au niveau des capacités. De plus les secteurs trouvés sont contigus.

La région géographique est ainsi partagée selon la figure 4.2.

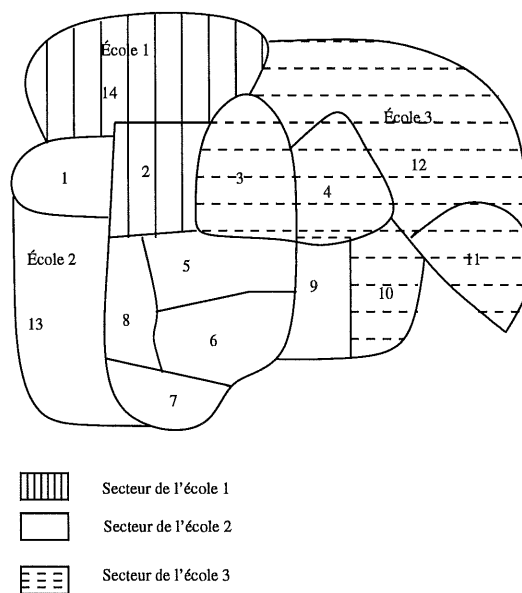


FIG. 4.2: *Résultat de la sectorisation*

Remarque La solution donnée sur cet exemple par la méthode à portes ouvertes est exactement la même que celle donnée par la première heuristique. Elle est cependant un peu différente de celle donnée par l'approche exacte.

CHAPITRE 5

APPLICATION DE LA RELAXATION LAGRANGIENNE AU MODÈLE (P)

Nous considérons toujours le programme linéaire (P). Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de résolution de (P) basée sur des techniques de relaxation lagrangienne. La relaxation lagrangienne est une stratégie générale de résolution des programmes mathématiques qui nous permet de décomposer le problème à résoudre pour exploiter leur structure spéciale. Cette approche nous permet d'exploiter les algorithmes existants pour résoudre les sous-problèmes, de développer des bornes sur la valeur optimale de la fonction objectif et de générer rapidement de très bonnes solutions non nécessairement réalisables. Cette approche de solution permettra de résoudre (P) à l'optimum si cela est possible. Cependant, elle ne garantit pas que les secteurs scolaires obtenus par cette solution soient contigus. Le fait est que la contiguïté n'a pas été traitée de façon explicite dans le programme (P). Obtenir des secteurs contigus étant l'un des critères d'acceptabilité de toute solution, nous compléterons donc cette approche de solution par une procédure de correction dans le but de rendre contigus s'ils ne le sont pas les secteurs de notre solution.

5.1 Résolution du problème (P)

En utilisant la relaxation lagrangienne, on relaxe dans la fonction objectif les contraintes sur les capacités normatives (1.3). Soit $\lambda = (\lambda_{kj})$ le multiplicateur, avec $\lambda_{kj} \geq 0$, associé à (1.3). On obtient le problème relaxé (P_R) suivant

$$(P_R) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k (d_{ij} + \lambda_{kj}) x_{ij} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^n -\lambda_{kj} m_k y_{kj} \\ \text{soit au chapitre trois, nous avons introduit dans le programme (P) une nouvelle contrainte} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^q y_{kj} \leq N^j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ entier}, \quad k = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Posons $L(X, Y, \lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k (d_{ij} + \lambda_{kj}) x_{ij} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^n -\lambda_{kj} m_k y_{kj}$ la fonction de Lagrange. Notons que comme on a éliminé la contrainte (1.3) de la formulation du problème lagrangien, la solution du problème lagrangien peut ne pas être réalisable pour le problème original. Mais la solution du problème lagrangien même si elle n'est pas réalisable pour (P) va fournir une borne inférieure sur la valeur optimale de la fonction objectif.

Dans ce problème lagrangien (P_R) , aucune contrainte ne relie les variables x_{ij} et y_{kj} . Nous pouvons donc décomposer le problème (P_R) en 2 sous-problèmes séparés (voir [1]), un problème (P_R^1) avec les variables x_{ij} et un autre (P_R^2) avec les variables y_{kj} . Les deux sous-problèmes sont les suivants

$$(P_R^1) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q P_i^k (d_{ij} + \lambda_{kj}) x_{ij} \\ \text{sous} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

et

$$(P_R^2) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^n -\lambda_{kj} m_k y_{kj} \\ \text{sous} \\ \sum_{k=1}^q y_{kj} \leq N^j, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ entier}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, q. \end{array} \right.$$

Pour tout choix de λ_{kj} , on résoud les deux sous-problèmes (P_R^1) et (P_R^2) pour avoir une solution optimale de (P_R) .

Résolution de (P_R^1)

Le programme linéaire (P_R^1) est un problème d'affectation. Notre seule contrainte est telle que pour toute zone i , il faut trouver une école j_i qui minimise $\sum_{k=1}^q P_i^k (d_{ij_i} + \lambda_{kj_i})$ auquel cas on prendra $x_{ij_i} = 1$ et $x_{ij} = 0, \quad \forall j \neq j_i$.

Ceci nous permet de réécrire le sous-problème (P_R^1) sous la forme d'un programme séparable en nombres entiers de la forme

$$(P_R^1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \min \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^q P_i^k (d_{ij} + \lambda_{kj})) x_{ij} \\ \text{sous} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

En remarquant que $P_i = \sum_{k=1}^q P_i^k$, on réécrit notre modèle sous la forme suivante

$$(P_R^1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \min \sum_{j=1}^n (P_i d_{ij} + \sum_{k=1}^q P_i^k \lambda_{kj}) x_{ij} \\ \text{sous} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Ce problème admet la solution optimale triviale $\bar{X} = (\bar{x}_{ij})$ définie par

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i d_{ij} + \sum_{k=1}^q P_i^k \lambda_{kj} = \min_l (P_i d_{il} + \sum_{k=1}^q P_i^k \lambda_{kl}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

à cause de la séparabilité des contraintes.

Résolution de (P_R^2)

Le programme linéaire (P_R^2) peut être réécrit sous la forme

$$(P_R^2) \left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} m_k y_{kj} \\ \text{sous} \\ \sum_{k=1}^q y_{kj} \leq N^j, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ entier}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, q \end{array} \right.$$

Comme aucune des contraintes ne contient de variables y_{kj} pour plus d'un j , on peut décomposer le sous-problème (P_R^2) en $|j| = n$ problèmes séparés (voir [1]). Donc pour j fixé, on va résoudre le problème (P_{Rj}^2) suivant

$$(P_{Rj}^2) \left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{k=1}^q \lambda_{kj} m_k y_{kj} \\ \text{sous} \\ \sum_{k=1}^q y_{kj} \leq N^j, \\ y_{kj} \geq 0, \text{ entier}, \quad k = 1, \dots, q. \end{array} \right.$$

Le programme linéaire (P_{Rj}^2) est un problème classique de sac à dos. Il existe des algorithmes pour le résoudre. La résolution de chacun de ces (P_{Rj}^2) donne la solution optimale de (P_R^2) . Notons $\bar{Y} = (\bar{y}_{kj})$ cette solution optimale.

On a donc que (\bar{X}, \bar{Y}) est une solution optimale de notre problème lagrangien (P_R) avec $L(\bar{X}, \bar{Y}, \lambda)$ comme valeur de la fonction objectif.

Si Z^* est la valeur optimale du problème initial (P) , on a

$$L(\bar{X}, \bar{Y}, \lambda) \leq Z^*. \quad (5.1)$$

A partir de la solution du problème lagrangien, il reste maintenant à trouver une solution optimale pour le problème initial (P). Pour cela, nous allons considérer le problème dual (D) de (P_R) encore appelé problème des multiplicateurs de Lagrange défini par

$$(D) = \max_{\lambda} L(\lambda) \quad \text{où} \quad L(\lambda) = \min_{X,Y} L(X,Y,\lambda) \quad \text{est la fonction duale.}$$

La résolution du problème dual (D) servira à ajuster la valeur des multiplicateurs $\lambda = (\lambda_{kj})$ dans le but d'améliorer la borne inférieure $L(\lambda)$ de (5.1) et de trouver une solution au programme linéaire (P).

5.1.1 Méthode lagrangienne classique

Elle consiste à résoudre le problème dual (D) en exploitant la concavité de la fonction duale (un optimum $\bar{\lambda}$ de $L(\lambda)$ sera un optimum global) et une méthode de type sous-gradient. En général, lorsqu'il existe un point-col et que le minimum en $\lambda = \lambda^*$ est un optimum de (D), la résolution de (D) permet d'obtenir une solution optimale du problème primal (P) (voir [8]).

Dans le cas où on n'a pas de point-col (il y a des sauts de dualité), la résolution du problème dual procure d'une part des solutions approchées de (P) et d'autre part des minorants de la valeur optimale Z^* de (P) (voir [8]). Vu le fait que la fonction duale $L(\lambda)$ peut être non différentiable, nous allons utiliser une procédure basée sur des techniques d'optimisation par le sous-gradient pour résoudre le problème dual (D).

Nous allons donc adapter l'algorithme d'Uzawa et Arrow-Hurwicz (voir [8]) pour résoudre (D).

Algorithme

Étape 1: Initialisation

Partir d'un point $\lambda^0 \geq 0$.

Étape 2: A la pème itération, calculer

$$\begin{aligned} L(\lambda^p) &= \min_{X,Y} L(X, Y, \lambda^p), \\ &= L(X^p, Y^p, \lambda^p). \end{aligned}$$

Étape 3: Soit $g_{kj}(X, Y) = \sum_{i=1}^m P_i^k x_{ij} - m_k y_{kj}$, $\forall j, k$.
 $g(X, Y) = [g_{kj}(X, Y)]_{k,j}$

Test d'arrêt. **3.1-** Si le vecteur donné par $g_{kj}(X^p, Y^p)$ est un sous-gradient de L en λ^p , c'est à dire si

$$L(\lambda) - L(\lambda^p) \leq [g_{1,1}(X^p, Y^p), \dots, g_{q,n}(X^p, Y^p)](\lambda - \lambda^p),$$

ou si $g_{kj}(X^p, Y^p) = 0$, pour tout k et pour tout j ,

alors le test est vérifié. Fin de l'algorithme.

3.2- Sinon, on fait une mise à jour des multiplicateurs de la façon suivante:

$$\lambda^{p+1} = [\lambda^p + \theta_p g_{kj}(X^p, Y^p)]^+ \text{ où } [\alpha]^+ = \max(0, \alpha)$$

et où $\theta_p = \frac{\mu_p [Z_{ub} - L(\lambda^p)]}{\|g(X, Y)\|^2}$ est le pas de déplacement à l'itération p de la solution courante λ^p . On note Z_{ub} la borne supérieure sur Z^* . Prendre

$$Z_{ub} = \sum_i \sum_j \sum_k P_i^k d_{ij} \text{ et } 0 < \mu_p < 2.$$

Retourner à l'étape 2.

En conclusion, on note que l'application de l'algorithme nous donne la solution (X^*, Y^*) qui est la solution du problème (P). Mais rien ne garantit que cette solution va générer

des secteurs contigus vu que l'algorithme qu'on a appliqué pour l'obtenir ne tient pas compte du critère de contiguïté. Nous allons donc aborder la dernière phase qui consiste à corriger cette anomalie de non contiguïté si d'aventure les secteurs obtenus ne sont pas contigus.

5.2 Le problème de la contiguïté

L'approche de correction de la non contiguïté que nous allons faire dans cette section est différente de celle présentée dans le chapitre 3. En effet au chapitre 3, le programme linéaire considéré contenait une contrainte de contiguïté. Cependant, à cause des problèmes créés par des circuits qui apparaissent dans les arbres hiérarchiques d'adjacence liés aux écoles, la contrainte de contiguïté peut devenir invalide. En d'autres termes, une solution peut respecter la contrainte de contiguïté sans pour autant générer des secteurs contigus. La correction se faisait donc au niveau des arbres hiérarchiques en brisant les circuits. Ce qui a pour effet de nous donner des secteurs contigus à la fin.

Dans ce chapitre, la méthode utilisée est différente. On essaie d'obtenir une répartition de la clientèle la meilleure possible sans tenir compte du critère de contiguïté. Une fois qu'on l'a obtenue, si les secteurs ne sont pas contigus, la procédure ci-après va la rendre contiguë.

Idée de la procédure

Considérons un secteur scolaire S_j non contigu, c'est à dire qu'il existe au moins une zone de S_j qui est isolée. Pour toute zone i isolée, il s'agira de voir dans le cadre d'une redistribution locale de zones s'il est possible de la raccorder à son secteur sans nuire à la capacité de cette dernière ou s'il faut la réaffecter ailleurs. La procédure doit donc répondre à cette question et ensuite corriger la non contiguïté soit en raccordant la zone i à son secteur et ceci en obligeant autant que possible les zones qui précèdent i sur

le plus court chemin la reliant à l'école de son secteur, soit en remplaçant au niveau de son secteur la zone i par d'autres zones qui sont contiguës au secteur S_j .

Posons N_c l'ensemble des écoles dont les secteurs sont non contigus, I_j l'ensemble des zones isolées du secteur S_j , $S_j^{I_j}$ l'ensemble des zones sur le plus court chemin séparant les zones de I_j de la frontière de S_j pour tout j de N_c . Posons $S = I_j \cup S_j^{I_j}$.

Procédure

Étape 1: Retirer les zones de S de leurs secteurs respectifs. Ces zones seront redistribuées aux secteurs environnants. Aller à étape 2.

Étape 2: On détermine pour chaque zone de S un des états suivants. Chaque zone i de S est soit

de type α : c'est à dire qu'il existe une unique école j telle que la zone i soit contiguë au secteur de l'école j , soit

de type β : c'est à dire qu'il existe au moins deux écoles j telles que la zone i soit contiguë au secteur des 2 écoles ou soit

de type γ : c'est à dire que la zone i à ce moment n'est contiguë à aucun secteur existant.

On rassemble donc les zones de S en ces trois groupes. Aller à l'étape 3.

Étape 3: Affectation de zones.

3.1- Affecter chaque zone i de type α au secteur S_j auquel elle est contiguë.

Faire $S_j := S_j \cup \{i\}$ puis $S := S - \{i\}$.

3.2- Affecter chaque zone i de type β au secteur S_j le plus proche, parmi ceux qui la touchent, et qui l'acceptent sans excéder les capacités de l'école j .

Si aucun ne peut l'accepter sans excéder les capacités de son école, l'assigner à l'école la plus proche en autorisant le dépassement. Faire $S_j := S_j \cup \{i\}$ puis

$S := S - \{i\}.$

Si $S \neq \phi$, cela suppose que l'ensemble S à ce niveau ne contient plus que des zones de type γ . Retourner à l'étape 2.

Si $S = \phi$, FIN on a trouvé une répartition avec des secteurs contigus.

Remarque La solution obtenue après cette procédure donne des secteurs contigus. Cependant, on peut avoir des dépassements de capacité à certains niveaux. Si cela arrive, la correction se fera en utilisant la procédure de correction de l'heuristique du chapitre 2.

CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de concevoir des algorithmes pour résoudre le problème de répartition des clientèles scolaires. Nous avons présenté quatre méthodes de résolution. Nous avons également appliqué trois de ces méthodes sur des exemples précis.

La première heuristique a donné des résultats satisfaisants sur les exemples traités. Elle respecte les exigences du problème et procure des solutions très encourageantes tant au niveau de la forme des secteurs trouvés qu'au niveau des moyennes d'étudiants par classe et qu'au niveau de la capacité physique de chaque école.

L'exemple 2 traité en utilisant les trois méthodes a permis de constater l'efficacité de la première heuristique. Sur cet exemple, la solution donnée par cette heuristique est meilleure que celle donnée par la méthode "exacte". Même au niveau de la forme des secteurs trouvés, la répartition donnée par l'heuristique est meilleure. La faiblesse de la méthode "exacte" est due principalement à la nature de la contrainte de contiguïté utilisée. Cette contrainte découle de l'arbre hiérarchique d'adjacence obtenu en ajoutant des chemins alternatifs à l'arbre d'adjacence des courts chemins. L'ajout de ces chemins alternatifs est arbitraire et le nombre ajouté peut varier d'une personne à l'autre. Par exemple sur l'arbre associé à l'école 3, on aurait pu ajouter un chemin alternatif de la zone 3 à l'école 3 situé dans la zone 12, ce qui augmenterait les possibilités de solutions réalisables.

Pour l'heuristique dite à portes ouvertes, elle respecte aussi les exigences du problème

et donne de tres bonnes solutions tant au niveau de la forme des secteurs trouvés qu'au niveau des moyennes d'étudiants par classe. Elle ouvre surtout une brèche au décideur qui peut observer et influencer le processus vu qu'il connait très bien son problème. Il saura donc apprécier si la solution lui est acceptable ou non.

Enfin, nous appliquons les techniques de la relaxation lagrangienne à la résolution du modèle (P). Une fois une solution optimale ou approximative trouvée, si elle ne donne pas des secteurs contigus, nous avons élaboré une procédure qu'on utilisera pour la correction.

Notre étude du problème de répartition des clientèles scolaires s'est arrêté ici. De plus la codification de deux de ces méthodes a permis de réaliser des tests multiples qui valident très bien les approches de solution.

Nous croyons cependant que les codes faits pour deux de ces méthodes demandent d'autres développements. Pour le code qui génère automatiquement le modèle (PC), une importante modification serait d'y inclure les librairies du logiciel Cplex et toutes les fonctions nécessaires pour que tout le traitement se fasse d'un seul bloc jusqu'à la solution finale.

Annexe A

ANNEXE

A.1 Codification de l'heuristique 1

La codification a occupé une place importante dans nos travaux. La nécessité de valider l'heuristique par des tests numériques a motivé ce travail qui nous a permis de faire plusieurs tests. Le langage utilisé est le C++.

A.1.1 Entrée des données.

Les données dont notre programme a besoin sont stockées dans un fichier dans l'ordre suivant:

- le nombre de zones m ,
- le nombre d'écoles n ,
- le nombre de niveaux dans une école q ,
- pour chaque zone, les populations étudiantes par zone et par niveau P_i^k ,
- les maximums d'élèves dans une classe de niveau k m_k ,
- les capacités (nombre de locaux dans les écoles) N_j ,
- pour chaque zone et chaque école, la distance d'une zone i à l'école j d_{ij} ,

-pour chaque zone, les zones voisines immédiates.

A.1.2 Traitement

Notre programme est constitué de multiples fonctions qui traduisent chaque partie de notre heuristique. Au début, les données étant stockées dans un fichier, le code va lire ces données et les stocker dans des tableaux. Automatiquement, et grâce aux fonctions définies dans le code, il exécute chaque étape dans l'ordre à savoir

- construction des coeurs,
- affectation des zones de Z,
- affectation des zones de B.

Une fois ces trois étapes terminées, une fonction test qui est définie dans le code lui permet de déterminer s'il y a eu dépassement de capacités à un niveau. S'il n'y en a pas eu, il a trouvé la solution. S'il y a des dépassements, il démarre la phase de correction de ces dépassements. D'abord par une première phase de correction (échange de zones entre secteurs). Pour cela, une fonction définie dans le code lui permet de cibler, pour chaque secteur débordé, les secteurs voisins dont les capacités des écoles associées n'ont pas été atteintes. Des tests successifs sont faits sur les zones frontières en vue de décider des échanges à faire. Les critères de choix sont indiqués dans l'heuristique. Si les excès ne sont pas totalement éliminés, on complète par la phase de fractionnement de zones. On écrit le modèle de fractionnement que l'on fait résoudre via le logiciel Cplex. Ceci complète l'application de l'heuristique.

A.2 Codification qui génère le modèle (PC)

La taille du programme (PC) croît rapidement avec le nombre de zones m , le nombre d'écoles n et le nombre de niveaux q dans les écoles. Il serait donc aberrant de vouloir traiter ceci manuellement. La nécessité de générer le programme automatiquement par ordinateur est donc incontournable si on veut gagner du temps.

A.2.1 Entrée des données

Les données sont stockées dans un fichier dans l'ordre suivant:

- le nombre de zones m ,
- le nombre d'écoles n ,
- le nombre de niveaux dans une école q ,
- pour chaque zone, les populations étudiantes par zone et par niveau P_i^k ,
- les maximums d'élèves dans une classe de niveau k m_k ,
- les capacités (nombre de locaux dans les écoles) N_j ,
- pour chaque zone et chaque école, la distance d'une zone i à l'école j d_{ij} ,
- pour chaque zone, ces prédécesseurs dans l'arbre hiérarchique d'adjacence associé à chaque école.

A.2.2 Traitement

Comme précédemment, nous avons définis un ensemble de fonctions dans le code et dont le but final est, une fois les données lues de les traiter automatiquement et d'afficher soit en sortie à l'écran ou dans un fichier notre modèle sous format industriel.

De façon interactive, on appelle le logiciel Cplex qui va lire ce fichier qui contient le modèle et le convertir en format LP. L'optimisation suit via ce logiciel.

Bibliographie

- [1] R. AHUJA , T. MAGNANTI et J. ORLIN, *Network flows.* Pages 624-626, 649-66 1993.

- [2] P.C. BELDFORD et H.D. RATLIFF, *A network flow model for racially balancing schools.*
Operation research, vol.20 Pages 619-628, 1972

- [3] S. CLARKE et J. SURKIS, *An operation research approach to racial desegregation of school systems.*
Socio-economic planning science, vol.1 Pages 259-272, 1968.

- [4] J.A. FERLAND et G. GUÉNETTE, *Decision support system for the school districting problem.*
Operation research, vol.38 Pages 15-21, January-February 1990.

- [5] M. GAUVREAU, *La sectorisation dans le milieu scolaire. Un outil informatique pour distribuer la clientèle scolaire dans les écoles.* Rapport de stage, Février 1982.

- [6] R.S. LIGGETT, *The application of an implicit enumeration algorithm to the school desegregation problem.*
Management science, vol.20 No2 Pages 159-168, octobre 1973.

- [7] H. MINE, K. OHNO et I. MIYAJI, *Algorithm for the school districting problem.*
Mem. faculty of engineering. Vol.44 No1 Pages 168-181, 1982.
- [8] M. MINOUX, *Programmation mathématique, Tome 1.* Pages 250, 252 et
239 1983.
- [9] P. SINHA et A. A. ZOLTNERS, *Sales territory alignment: A review and model.*
Management science, vol.29 No11 Pages 1237-1256 , november 1983.
- [10] L. SULLIVAN, *Le problème des affectations spatialisées.* Mémoire Pages 18-
20, Février 1991.